
信号与系统：第 2 章连续时间系统的时域分析

考前复习提要 with 公式速查

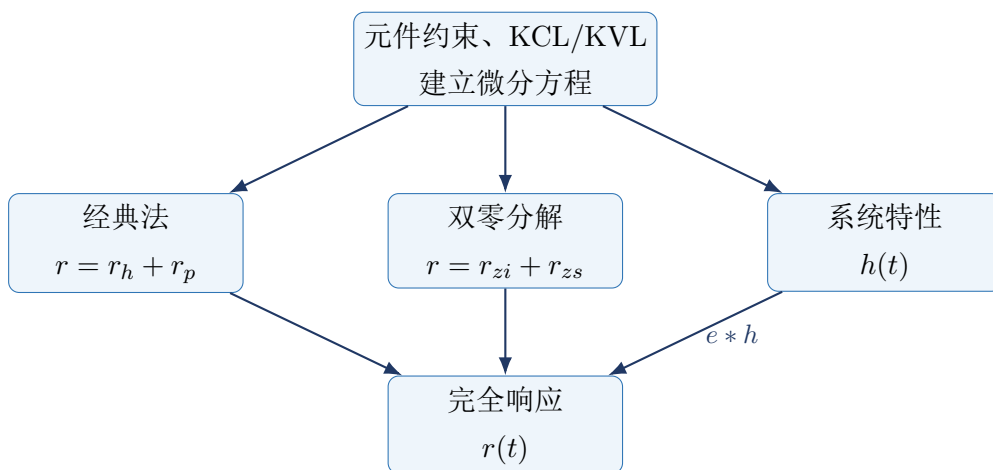
使用说明：中文为主，核心术语附英文；每个考点均标注原课件与页码。建议先看“核心公式”和“解题方法”，再用页码回查课件推导与例题。

目录

1	2-1	时域分析总览	2
2	2-2	微分方程的建立与经典解	2
	2.1	模型与经典法	2
	2.2	典型模型与完整例题链	3
3	2-3	$0^-/0^+$ 跳变与冲激匹配	4
	3.1	起始状态与导出初值	4
	3.2	冲激函数匹配法	4
4	2-4	零输入响应与零状态响应	5
5	2-5	冲激响应与阶跃响应	6
	5.1	定义与一般结构	6
	5.2	三种时域求法	7
6	2-6	卷积与图解计算	8
	6.1	定义和系统意义	8
	6.2	反褶、平移与重叠区间	8
7	2-7	卷积的性质	9
8	2-8	微分算子法	10
	8.1	算子定义与传输算子	10
9	2-9	分配函数与冲激的严格理解	11
	9.1	分配、检试函数与冲激	11
	9.2	必须熟练的运算	12
	9.3	广义极限	13
10		全章解题路线速查	13

1 2-1 时域分析总览

- **时域分析** (*time-domain analysis*) 不经过傅里叶或拉普拉斯变换，直接建立并求解系统的微分方程或积分方程；其物理意义直观，也是后续变换域分析的基础。 (§2.1 引言.ppt, p.2)
- 系统模型常分为**输入–输出描述** (*input–output description*) 与 **状态变量描述** (*state-variable description*)：前者是一元 N 阶方程，后者是 N 元一阶方程；本章以输入–输出描述为主。 (§2.1 引言.ppt, p.2)
- 本章主线是“列方程 $\rightarrow$ 求 0^+ 初值 $\rightarrow$ 求完全响应”，以及“求冲激响应 $h(t) \rightarrow$ 卷积 (*convolution*) 求零状态响应”。 (§2.1 引言.ppt, p.3-4)



(§2.1 引言.ppt, p.3-4)

本章两条总公式

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t), \quad r_{zs}(t) = e(t) * h(t).$$

(§2.1 引言.ppt, p.3-4; §2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.2,7)

易错点

卷积 $e * h$ 只给出**零状态响应**。若系统有非零初始储能，必须另求零输入响应；经典法定系数使用的是 0^+ 条件，而不是未经判断便直接使用 0^- 状态。 (§2.1 引言.ppt, p.3-4; §2.2 微分方程式的建立与求解.ppt, p.7)

2 2-2 微分方程的建立与经典解

2.1 模型与经典法

线性、参数不随时间变化的实际系统可由线性常系数微分方程描述。电路建模同时依赖元件伏安关系和网络拓扑关系 KCL、KVL；方程阶次通常等于独立动态元件数。 (§2.2 微分方程式的建立与求解.ppt, p.3-5)

n 阶 LTI 输入–输出方程

$$C_0 r^{(n)} + C_1 r^{(n-1)} + \cdots + C_{n-1} r' + C_n r = E_0 e^{(m)} + E_1 e^{(m-1)} + \cdots + E_{m-1} e' + E_m e.$$

(§2.2 微分方程式的建立与求解.ppt, p.5)

$$r(t) = r_h(t) + r_p(t).$$

齐次解 (homogeneous solution) 由特征根决定；特解 (particular solution) 按右端函数形式用待定系数法 (method of undetermined coefficients) 确定。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.6-8)

- 单根 α_i 对应 $A_i e^{\alpha_i t}$ ；若 α 是 k 重根，对应

$$(A_0 + A_1 t + \cdots + A_{k-1} t^{k-1}) e^{\alpha t}.$$

(§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.7；例 2-2-3.ppt, p.1)

- 常数、多项式、指数、正弦输入的特解分别试设为同类函数；若试设与齐次解重复 k 次，整个试设应乘 t^k 。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.8-9)
- 特解形式要看微分方程右端化简后的整体函数。例如右端含 $e'(t) + e(t)$ 时，不能只看原输入 $e(t)$ 。 (例 2-2-4.ppt, p.1-3)

经典法求完全响应

- 选定输出变量，利用元件约束和 KCL/KVL 列方程并消去中间变量。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.4；例 2-2-1.ppt, p.1)
- 解特征方程，按单根、重根或共轭复根写 $r_h(t)$ 。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.7；例 2-2-3.ppt, p.1)
- 将输入及其导数代入右端，试设并求出 $r_p(t)$ 。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.7-9；例 2-2-4.ppt, p.1-3)
- 先由换路前稳态求 0^- ，再由连续性或冲激匹配求 0^+ ，最后用 $r(0^+), r'(0^+), \dots$ 定齐次解系数。 (§2.2 微分方程的建立与求解.ppt, p.7；例 2-2-5.ppt, p.4-6)

2.2 典型模型与完整例题链

RLC 并联电路与质量-弹簧-阻尼系统虽然物理对象不同，却可具有相同的二阶数学结构：

$$Cv'' + \frac{1}{R}v' + \frac{1}{L}v = i'_s, \quad mv'' + fv' + kv = F'_s.$$

(例 2-2-1.ppt, p.1；例 2-2-2.ppt, p.1)

开关电路例题得到

$$i'' + 7i' + 10i = e'' + 6e' + 4e,$$

换路后 $e(t) = 4$ ，故

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5}.$$

由 $i(0^+) = 14/5$ 、 $i'(0^+) = -2$ 解得

$$i(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) A, \quad t \geq 0^+.$$

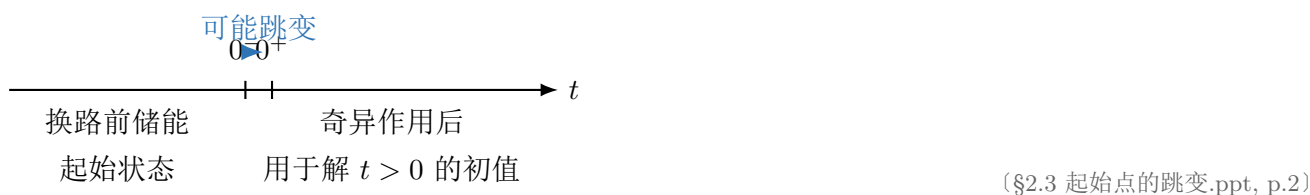
(例 2-2-5.ppt, p.2-6)

易错点

- 建模后应检查方程阶数是否与独立储能元件数一致，并检查消元过程中是否引入了输入导数。
(§2.2 微分方程式的建立与求解.ppt, p.4-5; 例 2-2-1.ppt, p.1)
- “直流电容开路、电感短路”只用于换路前已达直流稳态；它不能替代 0^+ 跳变判断。
(例 2-2-5.ppt, p.4-5)
- 普通换路时 v_C, i_L 连续；若存在冲激电流或冲激电压，则连续性结论失效。
(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.3-7)

3 2-3 $0^-/0^+$ 跳变与冲激匹配

3.1 起始状态与导出初值



起始状态 (*initial state at 0^-*) 描述激励加入前的储能；导出起始状态 (*derived initial state at 0^+*) 是跨过起始点奇异作用后，用于求解 $t > 0$ 方程的初始条件。
(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.2-3)

电容、电感的跳变积分

$$v_C(0^+) - v_C(0^-) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau) d\tau,$$

$$i_L(0^+) - i_L(0^-) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(\tau) d\tau.$$

有限电流不能使电容电压跳变，有限电压不能使电感电流跳变；冲激面积分别产生 $\Delta v_C = Q/C$ 、 $\Delta i_L = \Phi/L$ 。
(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.3-6)

$$v_C(t) = Eu(t) \Rightarrow i_C(t) = CE\delta(t), \quad i_L(t) = I_s u(t) \Rightarrow v_L(t) = LI_s \delta(t).$$

(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.5,7)

3.2 冲激函数匹配法

冲激函数匹配法 (*singular-function coefficient matching*) 的核心是：把方程两边同阶冲激及其导数的系数逐项相等。

记 $\Delta r = r(0^+) - r(0^-)$ ，课件以 $\Delta u(t)$ 表示只跨越 0^- 到 0^+ 的相对单位跳变。若 $r(t)$ 含 $\Delta r \Delta u(t)$ ，则 $r'(t)$ 含 $\Delta r \delta(t)$ ，更高阶导数依次产生 $\delta'(t), \delta''(t), \dots$ 。
(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.8-10)

奇异项逐阶配平

- 把阶跃输入及其各阶导数完整展开为 $\Delta u, \delta, \delta', \dots$ 。
(例 2-3-3.ppt, p.5)
- 从右端最高阶奇异项开始，在 $r^{(n)}, r^{(n-1)}, \dots$ 中设置对应系数。
(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.8-10)
- 按 $\delta^{(q)}, \dots, \delta, \Delta u$ 列表比较系数。
(例 2-3-3.ppt, p.8-11)

4. 沿积分链解释系数： r 中 Δu 的系数是 Δr ， r' 中 Δu 的系数是 $\Delta r'$ ，依此类推。（例 2-3-3.ppt, p.6-7,11）

例如

$$r' + 3r = 3\delta'(t)$$

要求 r 含 $3\delta(t) - 9\Delta u(t)$ ，因此

$$\Delta r = -9, \quad r(0^+) = r(0^-) - 9.$$

(§2.3 起始点的跳变.ppt, p.8-10)

对

$$r'' + 7r' + 10r = 2\delta' + 12\delta + 8\Delta u,$$

逐阶配平得

$$\Delta r = 2, \quad \Delta r' = -2, \quad \Delta r'' = 2.$$

若 $r(0^-) = 4/5$, $r'(0^-) = 0$ ，则 $r(0^+) = 14/5$, $r'(0^+) = -2$ 。（例 2-3-3.ppt, p.5-7）

易错点

冲激系数不是普通函数在 0 点的函数值。高阶列表中的后续系数可能只是更高阶导数的跳变量；例如三阶练习中的 $d = -38$ 不是题目所求的 $\Delta r''$ ，而 $\Delta r''' = 14$ 。（例 2-3-3.ppt, p.8-11）

4 2-4 零输入响应与零状态响应

按产生原因分解完全响应

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t).$$

零输入响应（zero-input response）：外加输入为零，仅由初始储能产生；**零状态响应**（zero-state response）：初始状态为零，仅由外加输入产生。（§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.2,6-7）

非零初始储能可等效为激励源：

$$v_C(t) = v_C(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(\tau) d\tau$$

对应零状态电容串联电压源 $v_C(0^-)u(t)$ ；

$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v_L(\tau) d\tau$$

对应零状态电感并联电流源 $i_L(0^-)u(t)$ 。（§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.2-4）

划分方式	第一部分	第二部分
解的形式	自由响应（natural）：齐次解、系统固有模式	强迫响应（forced）：形式取决于外加输入式
长期行为	暂态响应（transient）：随时间消失	稳态响应（steady-state）：长期保留
产生原因	零输入响应（zero-input）：初始状态产生	零状态响应（zero-state）：外加输入产生

(§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.5-7)

线性分解题

若在相同初始条件下，输入 $e(t)$ 与 $2e(t)$ 分别产生完全响应 r_1, r_2 ，则

$$r_1 = r_{zi} + r_{zs}, \quad r_2 = r_{zi} + 2r_{zs}.$$

先解出两个分量，再分别处理输入延时或初始状态缩放。例题中

$$r_{zi} = 3e^{-3t}u(t), \quad r_{zs} = [-e^{-3t} + \sin(2t)]u(t).$$

(例 2-4-1.ppt, p.1-2)

易错点

- 输入延时只使零状态响应延时；零输入响应仍从原起始时刻释放，不能跟着输入整体平移。
(例 2-4-1.ppt, p.1-2)
- 自由/强迫、暂态/稳态、零输入/零状态的划分依据不同，不能机械地一一对应。 (§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.5-7)
- 系统线性应分别理解为零状态响应对输入线性、零输入响应对初始状态线性。 (§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.8)

5 2-5 冲激响应与阶跃响应

5.1 定义与一般结构

单位冲激响应 (*unit impulse response*) $h(t)$ 是单位冲激输入下的零状态响应；单位阶跃响应 (*unit step response*) $g(t)$ 是单位阶跃输入下的零状态响应。二者都是系统特性的时域描述。 (§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.2,5,9)

冲激响应方程与阶跃关系

将 $e(t) = \delta(t)$, $r(t) = h(t)$ 代入一般系统方程：

$$C_0 h^{(n)} + \cdots + C_n h = E_0 \delta^{(m)} + \cdots + E_m \delta.$$

(§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.3)

对 $t > 0$ ，右端奇异项为零，因此普通函数部分按齐次解形式书写。若特征根为简单根且 $n > m$ ，

$$h(t) = \left[\sum_{i=1}^n A_i e^{\alpha_i t} \right] u(t).$$

(§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.4)

$$g(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau, \quad h(t) = g'(t)$$

其中求导按广义函数理解；因果系统常把积分下限写成 0^- 。 (§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.5-6)

阶次关系	$h(t)$ 的奇异部分	判断	
$n > m$	不含 δ 及其导数	可从指数齐次形式开始	(§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.3-4)
$n = m$	一般含 $\delta(t)$	必须保留直接冲激项	
$n < m$	含 δ 及更高阶导数	先做奇异项匹配	

5.2 三种时域求法

求 $h(t)$ 的选择顺序

1. 先比较输出最高阶 n 与输入最高阶 m ，确定是否存在 $\delta^{(k)}$ 项。
p.3-4

2. 对 $t > 0$ 写齐次解形式，再用冲激匹配求 0^+ 跳变量并定系数。
p.4,8

3. 也可将 $q(t)u(t)$ 逐次广义求导，直接比较 $\delta^{(k)}$ 系数。
(例 2-5-1.ppt, p.5; 例 2-5-2.ppt, p.3)

4. 对归一化标准方程

$$\hat{h}^{(n)} + a_{n-1}\hat{h}^{(n-1)} + \cdots + a_0\hat{h} = \delta(t),$$

可直接使用

$$\hat{h}^{(n-1)}(0^+) = 1, \quad \hat{h}^{(k)}(0^+) = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

(§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.7; 定初始条件.ppt, p.1)

RC 一阶系统

$$RC\,v_C' + v_C = \delta(t)$$

的冲激响应为

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}u(t).$$

对其求导时，电容电流还含起始冲激项，正是该冲激使电容电压在 0 点建立初始值。(例 2-5-1.ppt, p.1-5)

对系统

$$r'' + 4r' + 3r = e' + 2e,$$

有

$$h'' + 4h' + 3h = \delta' + 2\delta,$$

$$h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^{-3t})u(t).$$

(例 2-5-2.ppt, p.1-3)

易错点

$$\frac{d}{dt}[q(t)u(t)] = q'(t)u(t) + q(0)\delta(t).$$

只对 $q(t)$ 求导会漏掉起始点冲激。标准齐次解法的初值结论只直接适用于左端最高阶系数已归一、右端仅为 $\delta(t)$ 的方程；输入侧含导数时应分解或改用匹配法。(例 2-5-1.ppt, p.3,5; §2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.7; 例 2-5-3.ppt, p.1)

6 2-6 卷积与图解计算

6.1 定义和系统意义

卷积积分

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

(§2.6 卷积.ppt, p.2)

任意信号可表示为移位冲激的连续叠加：

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

利用 LTI 的线性与时不变性，

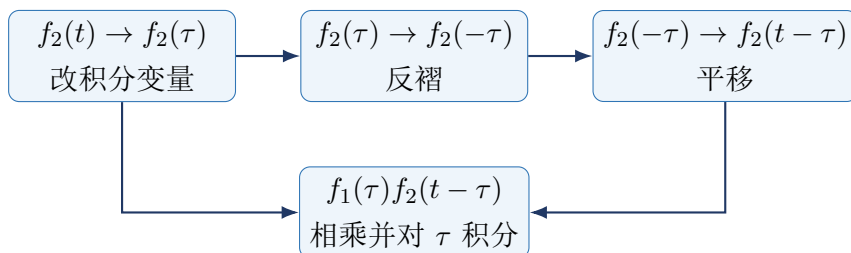
$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) h(t - \tau) d\tau = e(t) * h(t).$$

(§2.6 卷积.ppt, p.3)

t 是观察输出的时刻和积分的参数， τ 是输入发生时刻和积分变量；因果系统中只有 $\tau \leq t$ 的输入能影响时刻 t 的响应。

(§2.6 卷积.ppt, p.6)

6.2 反褶、平移与重叠区间



(§2.6 卷积.ppt, p.4-5)

图解卷积 (graphical convolution) 五步法

1. 先写两个信号的非零区间，并用交换律选择更简单的函数作为移动函数。(§2.6 卷积.ppt, p.5; 证明交换律.ppt, p.1)
2. 将移动函数反褶为 $f_2(-\tau)$ ，再平移为 $f_2(t - \tau)$ 。(§2.6 卷积.ppt, p.5)
3. 找 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(t - \tau)$ 同时非零的交集：下限取各下界的较大者，上限取各上界的较小者。
(§2.6 卷积.ppt, p.7; 例 2-6-2.ppt, p.9)
4. 按移动区间端点经过固定区间端点的时刻分段；无重叠时卷积为零。(例 2-6-2.ppt, p.2-7)
5. 分段积分后检查端点连续性和总支撑区间。(例 2-6-2.ppt, p.8-9)

有限支撑的快速判定

若

$$\text{supp } f_1 = [A, B], \quad \text{supp } f_2 = [C, D],$$

则

$$\text{supp}(f_1 * f_2) = [A + C, B + D].$$

这只确定卷积可能非零的总区间，内部仍需按端点相遇次序分段。

(例 2-6-2.ppt, p.8-9)

例 2-6-2 中固定区间为 $[-1, 1]$ ，移动区间为 $[t-3, t]$ ；临界时刻为 $t = -1, 1, 2, 4$ ，卷积只在 $[-1, 4]$ 非零。

(例 2-6-2.ppt, p.1-9)

易错点

- 不要混淆 t 与 τ ：积分完成后答案中不应再含 τ 。 (§2.6 卷积.ppt, p.5-6)
- 只有当输入与冲激响应都从 0 开始时，才能直接把积分限写为 $\int_0^t$ 。 (§2.6 卷积.ppt, p.4,6-7)
- 双边正弦输入与因果指数系统卷积可直接得到稳态正弦；若输入改为单边正弦 $C \sin \omega_0 t u(t)$ ，还会出现暂态项。 (例 2-6-3.ppt, p.1)

7 2-7 卷积的性质

代数、微积分与奇异信号性质

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1,$$

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3,$$

$$(f * f_1) * f_2 = f * (f_1 * f_2).$$

(§2.7 卷积的性质.ppt, p.2-4; 证明交换律.ppt, p.1)

若 $g = f * h$ ，则

$$g^{(n)} = f * h^{(n)} = f^{(n)} * h, \quad g^{(-1)} = f * h^{(-1)} = f^{(-1)} * h.$$

(§2.7 卷积的性质.ppt, p.5; 微积分性质的证明.ppt, p.1)

$$f * \delta = f, \quad f * \delta(t - t_0) = f(t - t_0),$$

$$f * \delta^{(k)} = f^{(k)}, \quad f * u = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda.$$

(§2.7 卷积的性质.ppt, p.6)

- **并联系统** (*parallel interconnection*) 的总冲激响应为 $h = h_1 + h_2$ ；分配律保证各支路响应相加。 (§2.7 卷积的性质.ppt, p.2-3)
- **级联系统** (*cascade interconnection*) 的总冲激响应为 $h = h_1 * h_2$ ；结合律允许改变分组，交换律允许交换 LTI 子系统次序。 (§2.7 卷积的性质.ppt, p.2,4)
- 框图例题中可先并联再级联：

$$h(t) = h_1(t) * [h_1(t) + h_2(t)].$$

(例 2-7-2.ppt, p.1)

用微积分性质降低卷积难度

把带跳变的矩形或分段常数信号微分成若干移位冲激，把另一个因子积分成连续折线，再利用 $f * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ 化为移位函数之和。这种方法常比逐段图解更短，但求导时必须保留端点冲激。

(§2.7 卷积的性质.ppt, p.5-6; 例 2-7-1.ppt, p.1)

易错点

积分性质带有边界条件。由定义

$$pp^{-1}f = f, \quad p^{-1}pf = f - f(-\infty).$$

因此 $(pf) * (p^{-1}h) = f * h$ 并非无条件成立；例如 $\text{sgn}(t)$ 不满足所需的无穷远边界条件。

(例 2-7-1.ppt, p.2-3; §2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.6)

8 2-8 微分算子法

8.1 算子定义与传输算子

微分算子 (differential operator) 记为 $p = d/dt$ ，由输入到输出的有理算子 $H(p)$ 可视为 **传输算子** (transfer operator)。

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.2-9)

微分算子与 LTI 算子方程

$$p = \frac{d}{dt}, \quad p^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad p^{-1}f(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.2-3)

$$A(p)y(t) = B(p)f(t), \quad A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i, \quad B(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j.$$

$$y(t) = H(p)f(t), \quad H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.7-9)

p 的正幂多项式可像代数多项式一样展开、因式分解；两个正幂算子多项式作用次序可以交换。(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.4)

由框图或电路建立算子方程

1. 积分器框图：选积分器输出为中间变量，依次写出其一阶、二阶导数与加法器方程。(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.10-12)
2. 消去中间变量，整理成 $A(p)y = B(p)f$ ，再写 $H(p) = B(p)/A(p)$ 。(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.7-12)
3. 电路算子模型：将 R, L, C 关系改写为含 p 或 $1/p$ 的形式，用节点法或网孔法列方程。(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.13-18)
4. 先清除 $1/p$ 分母再消元，最后展开回微分方程检查阶数和符号。(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.14-18)

框图例题得到

$$(p^2 + 5p + 3)y = (4 - 2p)f, \quad H(p) = \frac{4 - 2p}{p^2 + 5p + 3}.$$

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.10-12)

节点法电路例题得到

$$(p^2 + 2p + 2)u_1 = 2(p + 1)f, \quad H(p) = \frac{2(p + 1)}{p^2 + 2p + 2}.$$

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.14-15)

网孔法例题最终得到

$$(2p^3 + 3p^2 + 4p + 2)i_2(t) = f(t).$$

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.16-18)

算子不是可任意约分的普通代数数

$$py = pf \Rightarrow y = f + c,$$

$$(p + a)y = (p + a)f \Rightarrow y = f + ce^{-at}.$$

约去公因式会丢失该算子的零空间，也就是齐次解和初始状态信息。此外

$$pp^{-1}f = f, \quad p^{-1}pf = f - f(-\infty),$$

所以 p 与 p^{-1} 的作用次序不对称。

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.5-6)

$H(p)$ 是时域微分算子的形式表达；本章尚未引入拉普拉斯变换的初始条件处理与收敛域，不能不加说明地把它完全等同于后续的 $H(s)$ 。

(§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.7-9)

9 2-9 分配函数与冲激的严格理解

9.1 分配、检试函数与冲激

只用“ $t \neq 0$ 时为零、总面积为 1”不能唯一刻画 $\delta(t)$ ；冲激应作为**分配函数/广义函数**（*distribution/generalized function*），通过它对**检试函数**（*test function*）的作用定义。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.2-7）

检试函数通常取 $\phi \in C_c^\infty$ ，即无限次可微且具有紧支撑。普通函数 $g(t)$ 诱导的分配为

$$\langle g, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t) dt,$$

它是把函数映射为数的线性连续泛函。

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.3-6)

Dirac 冲激及其导数

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \quad \langle \delta(t - t_0), \phi \rangle = \phi(t_0).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.7,12)

$$\langle \delta^{(k)}, \phi \rangle = (-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

特别地,

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\phi'(0), \quad \delta'(-t) = -\delta'(t).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.16-17)

9.2 必须熟练的运算

抽样、尺度、复合、卷积

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0), \quad \delta(-t) = \delta(t).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.10-12)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0.$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.11)

若 $f(t_i) = 0$ 且 $f'(t_i) \neq 0$, 各 t_i 为互异单实根, 则

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|f'(t_i)|}.$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.14-15)

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2), \quad f * \delta(t-t_0) = f(t-t_0).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.12-13)

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t), \quad f * \delta^{(k)}(t-t_0) = f^{(k)}(t-t_0).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.16,18)

复合冲激与 δ' 计算

- 求 $\delta(f(t))$: 先列出所有互异单实根 t_i , 再计算每个权值 $1/|f'(t_i)|$ 。例如

$$\delta(t^2-9) = \frac{1}{6}[\delta(t-3) + \delta(t+3)].$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.14-15)

- 含冲激偶的乘积不能只做普通抽样:

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t).$$

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.17)

- 多项式与高阶冲激相乘可通过对任意检试函数作用并分部积分验证, 如 $t^2\delta'' = 2\delta$, $t^3\delta'' = 0$ 。

(§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.19)

以标准分配公式为准

- 尺度公式分母必须有绝对值；否则 $a < 0$ 时会错误地产生负冲激。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.11）
- $\delta(f(t))$ 的单根公式同样使用 $|f'(t_i)|$ ；若 $f'(t_i) = 0$ 为重根，该简单公式不适用。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.14-15）
- 冲激偶尺度变换的标准形式为

$$\delta'(at) = \frac{1}{a|a|}\delta'(t),$$
 不能对所有 $a \neq 0$ 都写成 $1/a^2$ 。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.18）
- 所有冲激恒等式都表示“对任意检试函数作用相同”，不能用普通函数的逐点值直觉解释。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.2-7）

9.3 广义极限

分配序列 $g_k \rightarrow g$ 的含义是：对任意检试函数 ϕ ,

$$\langle g_k, \phi \rangle \rightarrow \langle g, \phi \rangle.$$

因此普通函数序列逼近 δ 时，应验证积分作用趋于 $\phi(0)$ ，而不是考察逐点极限。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.6-9）

通过分部积分可得高频复指数在广义意义下趋于零，从而

$$e^{\pm j\omega t} \rightarrow 0, \quad \sin \omega t \rightarrow 0, \quad \cos \omega t \rightarrow 0 \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

均指分配意义的极限，不是逐点极限。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.20-21）

10 全章解题路线速查

拿到连续时间系统题后的判断顺序

1. **先判目标**：完全响应、零输入响应、零状态响应、冲激响应，还是阶跃响应。（§2.1 引言.ppt, p.3-4；§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.6-7）
2. **再判初值**：由换路前稳态求 0^- ；若存在奇异输入，用积分或冲激匹配求 0^+ 。（例 2-2-5.ppt, p.4-6；§2.3 起始点的跳变.ppt, p.3-10）
3. **经典法**：特征根写齐次解，右端形式写特解，用 0^+ 条件定系数。（§2.2 微分方程式的建立与求解.ppt, p.6-9）
4. **双零法**： r_{zi} 解齐次方程， $r_{zs} = e * h$ ，最后相加。（§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.2,7）
5. **求 h** ：先比较 n, m 判断奇异项，再选冲激匹配、系数平衡或标准齐次解法。（§2.5 冲激响应和阶跃响应.ppt, p.3-8）
6. **做卷积**：先判支撑，后反褶平移；下限取大、上限取小，按端点相遇分段。（§2.6 卷积.ppt, p.4-7；例 2-6-2.ppt, p.2-9）
7. **能用性质就化简**：并联相加、级联卷积，冲激实现恒等/移位/微分。（§2.7 卷积的性质.ppt, p.2-6）
8. **算子约分要谨慎**：检查被约因子的零空间和 $p^{-1}p$ 的边界项。（§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.5-6）

9. 冲激按分配计算：尺度与复合公式保留绝对值， $\delta^{(k)}$ 抽样保留 $(-1)^k$ 。（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.11,14-18）

考前最后检查

- 是否把 0^- 直接当成 0^+ ？是否漏看冲激输入造成的跳变？（§2.3 起始点的跳变.ppt, p.2-7）
- 是否把 $e * h$ 当成完全响应？是否把输入延时错误地施加到零输入响应？（§2.4 零输入响应和零状态响应.ppt, p.6-7；例 2-4-1.ppt, p.1-2）
- 对 $q(t)u(t)$ 求导时是否漏掉 $q(0)\delta(t)$ ？（例 2-5-1.ppt, p.3,5）
- 卷积分段是否覆盖整个支撑区间，积分结果中是否还残留 τ ？（§2.6 卷积.ppt, p.5-7；例 2-6-2.ppt, p.8-9）
- 是否无条件使用了 $p^{-1}p = 1$ ，或随意约去了算子公因式？（§2.8 用算子表示微分方程.ppt, p.5-6）
- 是否写成 $\delta(at) = \delta(t)/a$ ，或在 δ' 抽样时漏掉负号？（§2.9 以分配函数概念认识冲激函数.ppt, p.11,16-17）