

信号与系统：第 3 章傅里叶分析

考前复习提要与公式速查

使用说明：中文为主，核心术语附英文；每个考点均标注原课件与页码。建议先看“核心公式”和“解题方法”，再用页码回查课件推导与例题。

南京大学《信号与系统》课件整理

2026 年 6 月 8 日

目录

1	3-1 频域分析总览	2
2	3-2 正交展开与周期信号傅里叶级数	2
2.1	正交、投影与完备性	2
2.2	三种傅里叶级数形式	3
2.3	对称性、收敛条件与有限项逼近	4
2.4	周期信号的平均功率	4
3	3-3 典型周期信号的频谱	4
3.1	周期矩形脉冲	4
3.2	其他典型周期波形	5
4	3-4 非周期信号的傅里叶变换	5
5	3-5 典型非周期信号的变换对	6
5.1	必须熟记的基本对	6
6	3-6 冲激、冲激偶与阶跃的傅里叶变换	7
7	3-7 傅里叶变换的性质	7
7.1	性质总表	7
7.2	高频题型	8
8	3-8 卷积定理	8
9	3-9 周期信号的傅里叶变换	9
10	3-10 抽样信号的傅里叶变换	10
10.1	理想冲激抽样	10
10.2	矩形脉冲抽样	10
11	3-11 抽样定理	11
12	全章公式与解题路线速查	11

1 3-1 频域分析总览

- **傅里叶分析** (*Fourier analysis*) 的核心是把信号分解为三角函数或复指数函数的组合，由时域转入频域，研究信号的频率组成及其与时间特性的对应关系。 (§3.1 引言, p.2)
- 本章主线：正交展开与傅里叶级数 → 傅里叶变换与典型频谱 → 变换性质与卷积定理 → 周期信号的傅里叶变换 → 抽样与抽样定理。 (§3.1 引言, p.4)
- 周期信号既可用傅里叶级数表示，也可用傅里叶变换统一描述；前者给出离散谱系数，后者把这些谱线写成频域冲激。 (§3.1 引言, p.4; §3.09 周期信号的傅里叶变换, p.6-7)
- 频谱分析直接引出**频谱** (*spectrum*)、**带宽** (*bandwidth*)、**滤波** (*filtering*)、**调制** (*modulation*) 和 **频分复用** (*frequency-division multiplexing, FDM*) 等概念。 (§3.1 引言, p.2)

易错点

- 先判断信号是否周期：周期信号通常对应离散谐波谱，非周期信号通常对应连续频谱密度。 (§3.1 引言, p.4)
- 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 是高效计算方法，不是另一套傅里叶变换定义。 (§3.1 引言, p.3)

2 3-2 正交展开与周期信号傅里叶级数

周期信号的**傅里叶级数** (*Fourier series*) 是其在正交三角函数或复指数基上的展开。 (§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.3-4,7)

2.1 正交、投影与完备性

- 在区间 $[t_1, t_2]$ 上定义内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t)g^*(t) dt.$$

若 $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ ($i \neq j$)，则 $\{g_r(t)\}$ 为**正交函数集** (*orthogonal function set*)。 (信号正交函数分解及完备基, p.5-6,9)

- 用正交函数集逼近 $f(t)$ 时，

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^N c_r g_r(t), \quad c_r = \frac{\langle f, g_r \rangle}{\langle g_r, g_r \rangle}.$$

各系数可独立求取，且该投影使方均误差最小。 (信号正交函数分解及完备基, p.5-8)

- 若 $N \rightarrow \infty$ 时逼近误差趋于零，则该函数集为**完备正交函数集** (*complete orthogonal set*)。 (信号正交函数分解及完备基, p.10)
- 在一周期内， $\{\cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t\}$ 以及 $\{e^{jn\omega_1 t}\}$ 构成傅里叶展开所需的正交基。 (§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.3,7)

2.2 三种傅里叶级数形式

三角形式与幅相形式

设周期为 T ，基波角频率 $\omega_1 = 2\pi/T$ ，本课程采用

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)],$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt.$$

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.4)

幅相余弦形式为

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \text{atan2}(-b_n, a_n).$$

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.5)

复指数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.7-8)

对 $n > 0$,

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n), \quad F_0 = a_0.$$

实信号还满足 $F_{-n} = F_n^*$ 。

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.9-10,14)

例 3-2-2：单边幅相谱与双边复谱

抽取源例 3-2-2 的基波部分，取最小算例

$$f(t) = \sin \omega_1 t + 2 \cos \omega_1 t,$$

源例还含直流项与二次谐波项；此处只保留基波项，用来突出“单边幅相谱 → 双边复谱”的换算步骤。则 $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ ，所以单边幅相系数为

$$c_1 = \sqrt{5}, \quad \varphi_1 = -\arctan \frac{1}{2}.$$

转为双边复指数系数：

$$F_1 = \frac{2-j}{2}, \quad F_{-1} = \frac{2+j}{2}.$$

因此正频率与负频率（negative frequency）处的两根谱线幅度均为 $\sqrt{5}/2$ ，相位互为相反数。（例 3-2-2, p.1-4）

- 三角幅相形式给出单边的幅度频谱（magnitude spectrum）与相位频谱（phase spectrum）；复指数形式给出包含正频率与负频率的双边谱。对 $n \neq 0$ ，单根双边谱线幅度为对应单边幅度的一半： $|F_n| = c_n/2$ ，

而直流项不折半。

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.6,10-11,14-15)

- 周期信号频谱具有离散性、谐波性和通常的收敛性；周期冲激序列是重要例外，其各次谱系数均为 $1/T$ ，频带无限宽。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.6,15；冲激序列的频谱不满足收敛性, p.1)

2.3 对称性、收敛条件与有限项逼近

- 偶函数 $f(t) = f(-t)$ ： $b_n = 0$ ，只含直流与余弦项；奇函数 $f(t) = -f(-t)$ ： $a_0 = a_n = 0$ ，只含正弦项。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.17-18)
- 奇谐函数满足 $f(t) = -f(t \pm T/2)$ ，直流和偶次谐波为零；偶谐函数满足 $f(t) = f(t \pm T/2)$ ，奇次谐波为零。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.19-20)
- 常用狄利克雷条件 (Dirichlet conditions)：一周期内间断点有限、极值点有限、且信号绝对可积。它们是傅里叶级数存在的充分条件，不是必要条件。(狄利克雷条件, p.1-5；冲激序列的频谱不满足收敛性, p.1)
- 截断到 N 次谐波所得 $S_N(t)$ 是最小方均误差逼近；增加谐波项通常降低整体方均误差，但间断点附近仍会出现有限级数振铃。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.22；傅里叶有限级数与吉布斯现象, p.1)

2.4 周期信号的平均功率

帕塞瓦尔关系 (Parseval's relation)

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2.$$

(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.21；周期信号的功率证明, p.1)

易错点

- 本课程中 a_0 就是直流分量，不采用某些教材中的 $a_0/2$ 写法。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.4,13)
- 用双边谱计算功率时必须计入正、负频率；只算正频率会少算交流功率。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.21；周期信号的功率证明, p.1)
- 相位要按象限确定，优先使用 atan2 ，不能只套普通反正切。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.5,10)

3 3-3 典型周期信号的频谱

3.1 周期矩形脉冲

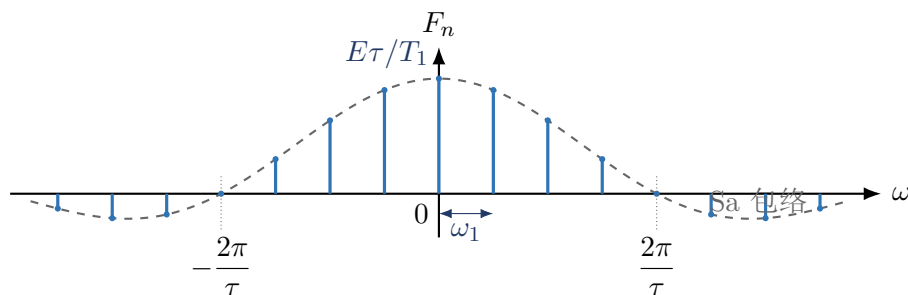
对幅度 E 、脉宽 τ 、周期 T_1 的中心对称矩形脉冲列， $\omega_1 = 2\pi/T_1$ 。由偶对称性可知 $b_n = 0$ 。(§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.3-4)

核心公式

$$a_0 = \frac{E\tau}{T_1}, \quad a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right),$$

$$F_n = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right), \quad \text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

(§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.4-6)



周期矩形脉冲列：仅在 $\omega = n\omega_1$ 处存在离散谱线，首零点由脉宽决定 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.3,6)

- 实际频谱只在 $\omega = n\omega_1$ 处有谱线；Sa 曲线只是离散谱线的包络。首零点为 $|\omega| = 2\pi/\tau$ 。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.5-6)
- T_1 增大：谱线间隔 ω_1 变小、单根谱线幅度下降；当 $T_1 \rightarrow \infty$ ，离散谱过渡为连续谱。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.7)
- 等效脉冲宽度 (equivalent pulse width) 可用脉宽 τ 表征；脉宽越窄，主瓣越宽，等效频带宽度 (equivalent bandwidth) 近似为

$$B_\omega \approx \frac{2\pi}{\tau}, \quad B_f \approx \frac{1}{\tau}.$$

频带宽度由脉宽决定，谱线间隔由周期决定，二者不可混淆。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.6-10)

- 主瓣内通常集中了大部分平均功率，可用帕塞瓦尔关系计算有限谐波所占功率比例。课件算例中前五次谐波约占总功率的 90.5%。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.8-10)

3.2 其他典型周期波形

- 周期锯齿波为奇函数，只含正弦分量，谐波幅度约按 $1/n$ 衰减。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.11; 例 3-2-1, p.1)
- 周期三角波只含直流与奇次余弦谐波，幅度约按 $1/n^2$ 衰减。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.12)
- 半波余弦含直流、基波及偶次谐波；全波余弦含直流及偶次谐波，高频幅度均约按 $1/n^2$ 衰减。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.13-14)
- 一般规律：波形越平滑，高次谐波衰减越快；突变越尖锐，所需频带越宽。 (§3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.10-14)

4 3-4 非周期信号的傅里叶变换

本课程的傅里叶变换约定

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

简记为 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 。

(§3.04 非周期信号的频谱分析—傅里叶变换, p.4-6)

- 当周期 $T_1 \rightarrow \infty$ 时， $\omega_1 = 2\pi/T_1 \rightarrow 0$ ，离散谱线变密、单根谱线幅度趋零，由此引入连续的 **频谱密度函数** (spectral density function) $F(\omega)$ 。 (§3.04 非周期信号的频谱分析—傅里叶变换, p.2-4)
- 复频谱写成

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega).$$

$|F|$ 为幅度频谱， φ 为相位频谱。

(§3.04 非周期信号的频谱分析—傅里叶变换, p.4,7)

- 对实信号, $R(\omega)$ 为偶函数、 $X(\omega)$ 为奇函数, 因而 $|F(\omega)|$ 为偶函数、相位在非零幅度处为奇函数。偶实信号对应实偶频谱, 奇实信号对应纯虚奇频谱。 (§3.04 非周期信号的频谱分析-傅里叶变换, p.7-8)
- 反变换表示信号由连续频率的无穷小复指数或余弦分量叠加而成。 (§3.04 非周期信号的频谱分析-傅里叶变换, p.9-10)
- 普通函数傅里叶变换存在的常用充分条件是 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$; 引入冲激后, 直流、正弦等非绝对可积信号也可在广义函数意义下变换。 (§3.04 非周期信号的频谱分析-傅里叶变换, p.11)

5 3-5 典型非周期信号的变换对

5.1 必须熟记的基本对

- 对称矩形脉冲

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

首零点为 $2\pi/\tau$, Sa 变号处幅度取绝对值、相位跳变 $\pm\pi$ 。 (§3.05 典型非周期信号的频谱, p.2-3)

- 单边衰减指数

$$Ee^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{E}{\alpha + j\omega}, \quad \alpha > 0,$$

$$|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}.$$

(§3.05 典型非周期信号的频谱, p.4-5)

- 直流与符号函数

$$E \longleftrightarrow 2\pi E\delta(\omega), \quad \text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}.$$

前者体现“时域无限宽、频域集中于零频”; 后者是纯虚奇频谱。 (§3.05 典型非周期信号的频谱, p.6-9)

- 冲激极限

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \text{Sa}(\omega\tau) = \delta(\omega).$$

使用时应检查峰值趋于无穷、宽度趋零且总面积保持不变。 (§3.05 典型非周期信号的频谱, p.7; 证明, p.1)

- 升余弦脉冲的边缘更平滑, 频谱比矩形脉冲更集中; 课件化简结果为

$$F(\omega) = \frac{E\tau \text{Sa}(\omega\tau)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}.$$

(§3.05 典型非周期信号的频谱, p.10-11)

解题方法

求典型信号频谱时按以下顺序:

1. 先认出基本变换对; (§3.05 典型非周期信号的频谱, p.1-11)
2. 再判断是否存在时移、尺度、调制或微分; (§3.07 傅里叶变换的性质, p.7-18)
3. 最后检查幅度奇偶性、相位奇偶性、零频值和高频极限。 (§3.04 非周期信号的频谱分析-傅里叶变换, p.7-8; §3.05 典型非周期信号的频谱, p.3,5)

6 3-6 冲激、冲激偶与阶跃的傅里叶变换

广义傅里叶变换基本对

$$\begin{aligned}\delta(t) &\longleftrightarrow 1, & 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega), \\ \delta'(t) &\longleftrightarrow j\omega, & u(t) &\longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.\end{aligned}$$

(§3.06 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换, p.2-5)

- 冲激偶满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t) dt = -f'(0),$$

由此直接得到 $\mathcal{F}\{\delta'(t)\} = j\omega$ 。(§3.06 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换, p.4; 冲激偶性质证明, p.1)

- 阶跃函数必须先写成 $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$; $\pi\delta(\omega)$ 表示直流分量, 不能遗漏。(§3.06 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换, p.5)
- $\delta(t)$ 可直接代入变换定义, 而 $u(t)$ 不绝对可积, 必须借助已知变换对或广义函数方法。(§3.06 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换, p.2,5)

7 3-7 傅里叶变换的性质

7.1 性质总表

性质	变换关系	直接结论
线性	$c_1f_1(t) + c_2f_2(t) \leftrightarrow c_1F_1(\omega) + c_2F_2(\omega)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.5)	可拆项计算。
对偶/对称	$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.4)	由已知对生成新对。
时间反转	$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.6,10)	实信号有 $F(-\omega) = F^*(\omega)$ 。
尺度变换	$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a }F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.7-10; 尺度变换性质证明, p.1)	时域压缩, 频域展宽。
时移	$f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.11)	幅度不变, 增加线性相位。
时移加尺度	$f(at + b) \leftrightarrow \frac{1}{ a }F\left(\frac{\omega}{a}\right)e^{j\omega b/a}$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.11; 时移加尺度变换证明, p.1)	先认清实际平移量 $-b/a$ 。
频移	$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.12-13)	频谱右移 ω_0 。
时域微分	$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.14-17; 时域微分性质证明, p.1)	分段线性波形可求导为冲激。
频域微分	$t^n f(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.14,18)	处理时域乘多项式。
时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$ (§3.07 傅里叶变换的性质, p.19; 时域积分性质证明, p.1-2)	$F(0) = 0$ 时冲激项才消失。

7.2 高频题型

- **时移与尺度：** 对 $f(2t - 5) = f[2(t - 5/2)]$ ，应得到尺度因子 $1/2$ ，并产生相位因子 $e^{-j5\omega/2}$ 。 (例 3-7-5 (时移，尺度)，p.1)

- **多脉冲：** 三个位置为 $-T, 0, T$ 的相同矩形脉冲满足

$$F(\omega) = F_0(\omega)[1 + 2\cos(\omega T)].$$

脉冲数改变包络内的细纹，不改变由单脉冲宽度决定的包络带宽。(例 3-7-4 (时移性质，教材 3-2)，p.1-2)

- **调制：**

$$g(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}G(\omega + \omega_0).$$

基带谱复制到 $\pm\omega_0$ ，每个副本幅度折半。

(例 3-7-6 教材例 3-4, p.1-2)

- **微分求谱：** 三角脉冲两次求导后成为三个冲激的组合，先求冲激组合频谱，再除以 $(j\omega)^2$ ，得到 Sa 平方型频谱。

(例 3-7-7 (时域微分)，p.1-3)

- **频域微分：**

$$\mathcal{F}\{(t-2)f(t)\} = j\frac{dF(\omega)}{d\omega} - 2F(\omega),$$

且

$$t^n \longleftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega).$$

(例 3-7-8 (频域微分)，p.1；例 3-7-9 (频域微分)，p.1)

易错点

- 尺度系数是 $1/|a|$ ，不是 $1/a$ ； $a < 0$ 时还包含时间反转。(§3.07 傅里叶变换的性质，p.7,10；尺度变换性质证明，p.1)
- 时域乘 $e^{+j\omega_0 t}$ 对应 $F(\omega - \omega_0)$ ，即频谱右移。(§3.07 傅里叶变换的性质，p.12-13)
- 时移不改变 $|F(\omega)|$ ；若幅度谱改变，说明运算有误。(§3.07 傅里叶变换的性质，p.11)
- 用微分性质反求频谱可能丢失 $\omega = 0$ 处的冲激项；信号含确定直流分量时要先将直流单独取出。(§3.07 傅里叶变换的性质，p.15-17)
- 时域积分不能一律只写 $F/(j\omega)$ ，必须先检查 $F(0)$ 。(§3.07 傅里叶变换的性质，p.19)

8 3-8 卷积定理

卷积与乘积的时频对应

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &\longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega), \\ f_1(t)f_2(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]. \end{aligned}$$

(§3.08 卷积特性 (卷积定理)，p.2)

- 对 LTI 系统，

$$g(t) = f(t) * h(t) \iff G(\omega) = F(\omega)H(\omega).$$

标准流程为“输入变换 $\rightarrow$ 乘系统频响 $\rightarrow$ 反变换”。

(§3.08 卷积特性 (卷积定理)，p.3)

- 两个相同矩形脉冲在时域卷积得到三角脉冲，频谱则为矩形脉冲 Sa 频谱的平方。（例 3-8-1, p.1）
- 变上限积分可写为 $f(t) * u(t)$ ，故

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

(§3.08 卷积特性（卷积定理），p.3)

易错点

$1/(2\pi)$ 出现在“时域相乘 $\rightarrow$ 频域卷积”一侧；时域卷积对应频域相乘时没有该因子。（§3.08 卷积特性（卷积定理），p.2）

9 3-9 周期信号的傅里叶变换

周期信号的冲激频谱

若

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t},$$

则

$$F_T(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1).$$

(§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.6-7)

- 周期信号的傅里叶变换不是普通数列，而是位于谐波频率处的冲激列；第 n 根冲激的强度为 $2\pi F_n$ 。（§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.6-7）
- 正弦、余弦的基本对：

$$\begin{aligned}\cos \omega_0 t &\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \\ \sin \omega_0 t &\longleftrightarrow -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0).\end{aligned}$$

(§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.4-5)

- 若单个脉冲 $f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$ ，其周期延拓的级数系数为

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(n\omega_1).$$

即先对连续频谱按 $\omega = n\omega_1$ 抽样，再除以周期。

(§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.8-9)

- 周期冲激序列满足

$$\delta_{T_1}(t) = \sum_k \delta(t - kT_1) \longleftrightarrow \omega_1 \sum_n \delta(\omega - n\omega_1), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

(§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.10-11)

- 周期矩形脉冲列可由级数系数法或 $f_T = f_0 * \delta_{T_1}$ 两条路线求得：

$$F_T(\omega) = E\tau\omega_1 \sum_n \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1).$$

(§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.12-13)

10 3-10 抽样信号的傅里叶变换

10.1 理想冲激抽样

核心公式

$$p(t) = \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s), \quad P(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s),$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}, \quad f_s(t) = f(t)p(t) = \sum_n f(nT_s)\delta(t - nT_s),$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s).$$

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3-5)

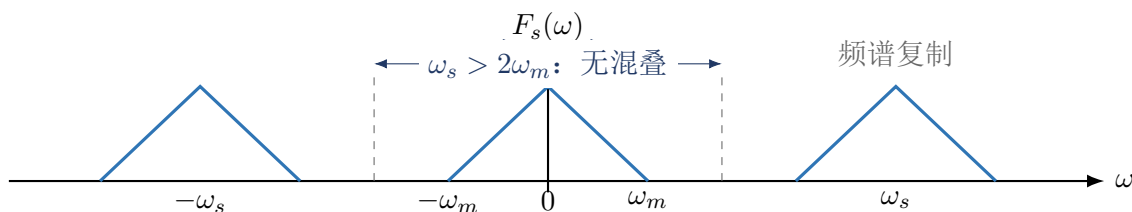
- 理想抽样在时域是相乘，在频域是卷积；结果为原频谱以 ω_s 为间隔周期复制，每个副本缩放为 $1/T_s$ 。
(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3-5)

- 若 $\omega_s > 2\omega_m$ ，相邻副本不重叠。用增益为 T_s 、截止频率满足

$$\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$$

的理想低通滤波器即可提取中心副本并恢复原信号。

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.5)



理想抽样后的频谱周期复制示意

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.4-5)

10.2 矩形脉冲抽样

- 周期矩形抽样脉冲的级数系数为

$$P_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right).$$

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.9)

- 矩形抽样频谱为

$$F_s(\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s).$$

各副本不再等幅，而是受 Sa 包络加权。

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.9-11)

- τ 越小，抽样脉冲频谱主瓣越宽；当 $\tau \rightarrow 0$ 时趋近理想冲激抽样。 τ 影响副本权重， T_s 决定副本间隔。

(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.9,12)

易错点

- 理想抽样的频谱副本缩放为 $1/T_s$ ，恢复低通的通带增益应为 T_s 。
(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3,5)

- 理想抽样副本等幅；矩形抽样副本受 Sa 权重影响，两种模型不能混写。（§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3,9）
- 时域相乘带来的 $1/(2\pi)$ 与冲激列强度 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 抵消后，才得到最终的 $1/T_s$ 。（§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3）

11 3-11 抽样定理

香农-奈奎斯特抽样定理 (Shannon-Nyquist Sampling Theorem)

若带限信号满足

$$F(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_m,$$

则无混叠均匀抽样必须满足

$$f_s \geq 2f_m \iff \omega_s \geq 2\omega_m \iff T_s \leq \frac{1}{2f_m}.$$

(§3.11 抽样定理, p.2-3)

- $f_N = 2f_m$ 称为奈奎斯特抽样率 (Nyquist sampling rate), $T_N = 1/(2f_m)$ 称为奈奎斯特抽样间隔 (Nyquist sampling interval)。(§3.11 抽样定理, p.3)
- 当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时，相邻频谱副本重叠，发生混叠 (aliasing)；重叠后的成分无法再由理想低通分离。(§3.11 抽样定理, p.3)
- 等号是理论临界条件；实际滤波器存在过渡带，工程上通常取 $f_s > 2f_m$ 并在抽样前使用抗混叠低通滤波器。(§3.11 抽样定理, p.3；例 3-11-1, p.1)
- 音频信号 $0 \sim 3.4\text{ kHz}$ 的理论最低抽样率为 6.8 kHz ；若取 8 kHz ，则 $T_s = 125\text{ }\mu\text{s}$ 。(例 3-11-1, p.1)

抽样题四步法

1. 确认题目使用普通频率 f 还是角频率 ω 。(§3.11 抽样定理, p.2-3)
2. 找出频谱支撑上界 f_m 或 ω_m 。(§3.11 抽样定理, p.2)
3. 比较 f_s 与 $2f_m$ ，判断是否混叠。(§3.11 抽样定理, p.3)
4. 若可恢复，再写低通截止频率范围和通带增益；理想冲激抽样时增益为 T_s 。(§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.5)

12 全章公式与解题路线速查

1. 周期信号求谱：先定 T, ω_1 ，检查奇偶与半波对称，再求 a_0, a_n, b_n 或 F_n ；最后区分单边谱与双边谱。(§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.4-20)
2. 非周期信号求谱：优先匹配基本变换对，再使用线性、尺度、时移、频移、微分或卷积性质。(§3.05 典型非周期信号的频谱, p.1-11；§3.07 傅里叶变换的性质, p.2-19)
3. 系统响应：写出 $G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ ，完成频域乘法后反变换；同时检查系统是否改变信号带宽或滤除关键谱分量。(§3.08 卷积特性 (卷积定理), p.2-3)
4. 能量/功率视角：周期信号用平均功率及 $\sum |F_n|^2$ 衡量各谐波贡献；单次脉冲则重点观察连续频谱

密度、主瓣和带宽。（§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.21; §3.03 典型周期信号的傅里叶级数, p.8-10; §3.05 典型非周期信号的频谱, p.2-3）

5. **抽样问题：**先画原谱，再按 ω_s 复制；看相邻副本是否重叠，最后确定恢复低通的截止频率与增益。（§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3-5; §3.11 抽样定理, p.2-3）

考前最后检查

- 正变换无 $1/(2\pi)$ ，反变换有 $1/(2\pi)$ 。（§3.04 非周期信号的频谱分析—傅里叶变换, p.4-6）
- a_0 是直流本身；双边非零频谱线幅度为单边谱的一半。（§3.02 周期信号的频谱分析——傅里叶级数, p.4,14）
- $u(t)$ 的频谱与时域积分公式都可能含零频冲激项。（§3.06 冲激函数和阶跃函数的傅里叶变换, p.5; §3.07 傅里叶变换的性质, p.19）
- 周期信号 FT 的冲激强度为 $2\pi F_n$ 。（§3.09 周期信号的傅里叶变换, p.6-7）
- 时域相乘对应频域卷积时有 $1/(2\pi)$ 。（§3.08 卷积特性（卷积定理）, p.2）
- 抽样副本间隔由 T_s 决定；无混叠条件是 $\omega_s \geq 2\omega_m$ 。（§3.10 抽样信号的傅里叶变换, p.3-5; §3.11 抽样定理, p.2-3）