
信号与系统：第 4 章拉普拉斯变换与连续系统

考前复习提要与公式速查

使用说明：中文为主，核心术语附英文；每个考点均标注原课件与页码。建议先看“核心公式”和“解题方法”，再用页码回查课件推导与例题。

目录

1	4-1 引言：为什么引入拉普拉斯变换	3
2	4-2 定义、单边/双边变换与收敛域	3
2.1	从傅里叶变换到拉普拉斯变换	3
2.2	收敛域 ROC	3
2.3	常用变换对	4
3	4-3 拉普拉斯变换的基本性质	5
3.1	初值定理与终值定理	6
4	4-4 拉普拉斯逆变换	6
4.1	有理式的标准流程	6
5	4-5 用拉普拉斯变换解微分方程与电路	8
5.1	微分方程的统一解法	8
5.2	s 域元件模型	8
6	4-6 系统函数 $H(s)$ 与系统互联	9
6.1	定义与求法	9
6.2	互联系统	9
7	4-7 零极点与时域响应	11
7.1	零极点表示	11
7.2	极点位置与时域模态	11
7.3	自由/强迫与暂态/稳态	11
8	4-8 零极点与频率响应	12
8.1	正弦稳态与 $H(j\omega)$	12
8.2	零极点矢量法	12
9	4-9 全通函数与最小相移函数	14
9.1	全通函数	14
9.2	最小相移与分解	14
10	4-10 连续 LTI 系统的稳定性	14
10.1	BIBO 定义与时域判据	14
10.2	因果有理系统的极点判据	15
11	4-11 双边拉普拉斯变换	16

11.1 变换式与 ROC 共同决定信号	16
11.2 同一有理式的三种答案	16
12 4-12 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	17
12.1 虚轴是连接两种变换的关键	17
12.2 三种 ROC 与虚轴关系	17
12.3 虚轴极点与频域冲激	17
13 全章解题速查	18

1 4-1 引言：为什么引入拉普拉斯变换

- 傅里叶变换 (*Fourier transform*) 具有清楚的频谱物理意义，但经典形式常要求信号满足绝对可积等条件；对增长信号或某些非绝对可积信号，直接使用会受限。 (§4.01 引言, p.2-3)
- 求时域响应时，傅里叶反变换需要计算无穷区间积分；拉普拉斯变换把微分、积分和卷积转化为关于复频率 s 的代数运算，通常更适合系统瞬态分析。 (§4.01 引言, p.2-4)
- 对微分方程作单边拉普拉斯变换 (*unilateral Laplace transform*) 时， 0^- 初始条件会自动进入 s 域方程，因此可以直接求全响应，而不必先单独求齐次解和特解。 (§4.01 引言, p.3; §4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、 S 域元件模型, p.3-4)
- 本章主线是：定义与收敛域 $\rightarrow$ 基本性质 $\rightarrow$ 逆变换 $\rightarrow$ 微分方程与电路 $\rightarrow$ 系统函数 $H(s) \rightarrow$ 零极点、频率响应与稳定性。 (§4.01 引言, p.4)

全章统一视角

遇到拉氏变换题，始终同时追踪四件事：

时间支撑 代数式 $F(s)$ 收敛域 ROC 零极点及其时域含义。

单边题的重点是初值和因果响应；双边题必须把 $F(s)$ 与 ROC 作为一个整体；系统题则要把极点位置翻译为衰减、振荡、稳定性和频率响应。 (§4.01 引言, p.4; §4.11 双边拉氏变换, p.2-4)

2 4-2 定义、单边/双边变换与收敛域

2.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

- 令 $s = \sigma + j\omega$ 。先给信号乘指数权 $e^{-\sigma t}$ ，再作傅里叶变换，就得到双边拉普拉斯变换 (*bilateral Laplace transform*)：

$$F(s) = \mathcal{L}_B\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

其中 σ 控制指数衰减或增长， ω 保留正弦频率含义。 (§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.3)

- 拉普拉斯逆变换 (*inverse Laplace transform*) 可由 Bromwich 积分实现，其路径是 ROC 内的一条竖直线 $\Re(s) = \sigma$ ：

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.4-5)

- 对有起因信号，常用单边定义

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

下限写成 0^- 是为了把 $t = 0$ 处的冲激和换路前初始状态纳入变换。 (§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.5)

2.2 收敛域 ROC

- 收敛域 (*region of convergence, ROC*) 是使变换积分存在的 s 平面区域；ROC 内不能含极点。对指数阶右边信号，ROC 通常是最右极点右侧的半平面。 (§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.6-7; §4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.9)

- 若存在 σ_0 , 使

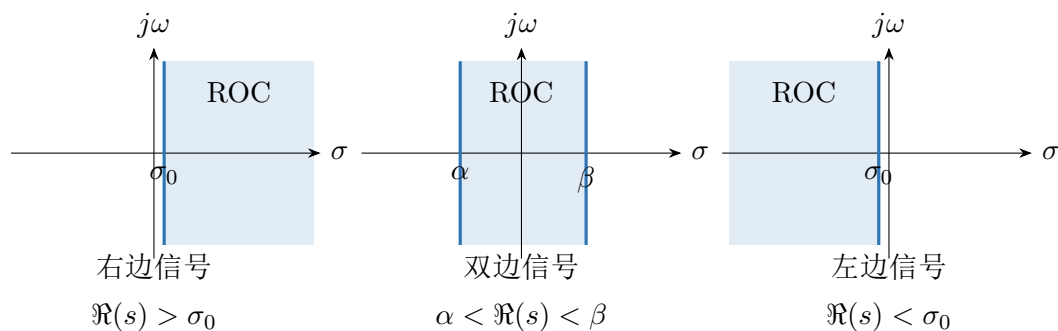
$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0, \quad \sigma > \sigma_0,$$

则 $f(t)$ 属于相应的**指数阶信号** (*exponential-order signal*)。多项式增长可被指数权压下, 而 e^{t^2} 比任意指数增长更快, 找不到有限收敛坐标。
(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.6-7)

- 双边变换中, 同一个有理式配不同 ROC, 可能对应不同的**右边信号** (*right-sided signal*)、**左边信号** (*left-sided signal*) 或**双边信号** (*two-sided signal*)。因此完整变换对应应写成

$$f(t) \longleftrightarrow (F(s), \text{ROC}).$$

(§4.11 双边拉氏变换, p.2-4)



(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.6; §4.11 双边拉氏变换, p.3-4)

2.3 常用变换对

必须熟记的右边信号变换对

$$\begin{aligned} \delta(t) &\longleftrightarrow 1, & \text{ROC: 全 } s \text{ 平面,} \\ \delta(t - t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}, & \text{ROC: 全 } s \text{ 平面 (有限 } t_0), \\ u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s}, & \Re(s) > 0, \\ e^{-\alpha t}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s + \alpha}, & \Re(s) > -\alpha, \\ t^n u(t) &\longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, & \Re(s) > 0, \\ \cos \omega_0 t u(t) &\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, & \Re(s) > 0, \\ \sin \omega_0 t u(t) &\longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, & \Re(s) > 0. \end{aligned}$$

(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.8-9; §4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.3)

易错点

- 不要把 s 默认成 $j\omega$ 。只有虚轴位于 ROC 内时, 普通傅里叶变换才可由 $s = j\omega$ 直接取得。
(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.3, p.6)
- 变换表中的指数、正弦和多项式通常按右边信号理解; 双边题必须额外说明时间支撑和 ROC。
(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.5, p.8-9)

3 4-3 拉普拉斯变换的基本性质

- 线性：

$$\mathcal{L}\{K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)\} = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s).$$

(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.3)

- 原函数微分：

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-).$$

一阶为 $sF(s) - f(0^-)$ ，二阶为 $s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$ 。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.4)

- 原函数积分：

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}.$$

积分初值不能在非零初始状态题中被省略。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.6)

- 时域延迟：

$$f(t - t_0)u(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0} F(s).$$

例如 $tu(t - 1) = [(t - 1) + 1]u(t - 1)$ ，故 $F(s) = e^{-s}(1/s^2 + 1/s)$ 。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.8; §4-03-时移特性例题, p.1)

- s 域平移：

$$e^{-\alpha t} f(t) \longleftrightarrow F(s + \alpha).$$

因此

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t u(t) \longleftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}.$$

(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.9; 频移性质例题, p.1)

- 尺度变换：

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0.$$

同时含尺度和平移时，先把信号整理成标准的 $f[a(t - t_0)]u(t - t_0)$ 形式。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.10)

- 卷积：

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s) F_2(s).$$

这是 $r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$ 与 $R_{zs}(s) = E(s)H(s)$ 等价的基础。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.13)

- 时域乘积：

$$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} (F_1 *_s F_2)(s).$$

这里的 $*_s$ 是对复频域变量 s 的卷积，不是时域卷积。(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.13)

- 对 s 微分与积分：

$$t^n f(t) \longleftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad \frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty F(\xi) d\xi.$$

(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.14-15)

3.1 初值定理与终值定理

端点值速算

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

- 初值定理要求相关变换存在；若 $F(s)$ 含多项式部分，应先分离对应的 $\delta(t)$ 、 $\delta'(t)$ 等冲激项，再讨论普通函数部分的 0^+ 值。 (§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.11; §4-03-初值定理例题, p.1)
- 使用终值定理前，必须检查 $sF(s)$ 在右半平面和虚轴上除原点外无极点；否则时间终值不存在，不能先代 $s = 0$ 。 (§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.12)

易错点

- 时域平移是乘 e^{-st_0} ， s 域平移是把 s 替换为 $s + \alpha$ ，两者不能混淆。 (§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.8-9)
- n 阶微分要带入从 $f(0^-)$ 到 $f^{(n-1)}(0^-)$ 的全部初值；尺度变换不要漏掉 $1/a$ 。 (§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.4, p.10)
- 抽样信号 $\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$ 的拉氏变换是 $\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nsT}$ ，本质上是 s 域级数。 (抽样信号的拉氏变换, p.1)

4 4-4 拉普拉斯逆变换

4.1 有理式标准流程

拉普拉斯逆变换 (*inverse Laplace transform*) 是由象函数 $F(s)$ 恢复时间函数 $f(t)$ 的过程；对有理式，核心工具是极点分解与查表。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.1-3)

解题方法

- 判断 $F(s)$ 是**真有理式** (*proper rational function*) 还是**非真有理式** (*improper rational function*)；若为非真有理式，先作多项式长除。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.4, p.7-8)
- 因式分解分母，识别互异实极点、共轭复极点和重极点。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.4-6)
- 作**部分分式展开** (*partial-fraction expansion*)，求各极点对应系数。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.5-6)
- 查基本变换对；若有 e^{-sT} ，最后统一作时移。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.5, p.9)
- 双边题还要根据 ROC 决定每一项是右边还是左边信号。 (§4.11 双边拉氏变换, p.4)

- 对互异单极点

$$F(s) = \sum_i \frac{A_i}{s - p_i}, \quad A_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i}.$$

每个极点 p_i 产生一个 $A_i e^{p_i t} u(t)$ 模态。 (§4.04 拉普拉斯逆变换, p.6; §4-04-单阶实数极点例题, p.1-2)

- 共轭极点 $-\alpha \pm j\beta$ 的留数若为 $A \pm jB$ ，合并后的实信号项为

$$2e^{-\alpha t} [A \cos \beta t - B \sin \beta t] u(t).$$

(§4-04-第二种情况：极点为共轭复数例题, p.1-2)

- 若 p 是 r 重极点,

$$F(s) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{(s-p)^k} + \cdots,$$

则

$$A_k = \frac{1}{(r-k)!} \frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}} [(s-p)^r F(s)] \Big|_{s=p}.$$

对应时域中出现 $t^{k-1}e^{pt}/(k-1)!$ 。

(§4-04-第三种情况：有重根例题, p.1-4)

- 非真分式的多项式部分对应冲激及其导数。例如 $s+2 \leftrightarrow \delta'(t) + 2\delta(t)$ 。(§4.04 拉普拉斯逆变换, p.7-8)
- 延时因子不参加部分分式:

$$e^{-sT}F_1(s) \longleftrightarrow f_1(t-T)u(t-T).$$

(§4.04 拉普拉斯逆变换, p.9)

典型部分分式例题

$$F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 3}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{5}{s+2} + \frac{6}{s+3},$$

$$f(t) = (e^{-t} - 5e^{-2t} + 6e^{-3t})u(t).$$

该题体现“极点决定指数模态，留数决定模态系数”。

(§4-04-单阶实数极点例题, p.1-2)

易错点

- 有理式不是真分式时，不能直接只展开分母因子，否则会漏掉冲激项。(§4.04 拉普拉斯逆变换, p.7-8)
- 共轭复极点最终应合并成实系数的衰减正弦/余弦；重极点必然带来 t^m 因子。(§4-04-第二种情况：极点为共轭复数例题, p.1-2; §4-04-第三种情况：有重根例题, p.3-4)

5 4-5 用拉普拉斯变换解微分方程与电路

5.1 微分方程的统一解法

设连续 LTI 系统满足

$$\sum_{k=0}^n a_k r^{(k)}(t) = \sum_{\ell=0}^m b_\ell e^{(\ell)}(t).$$

解题方法

1. 写出输入 $E(s)$ 和输出 $R(s)$ ，对每一阶导数使用单边微分性质。（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.3-4）

2. 把 $r(0^-), r'(0^-), \dots, r^{(n-1)}(0^-)$ 全部移入 s 域方程。（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.4）

3. 解出 $R(s)$ ，必要时分成由初值产生的 $R_{zi}(s)$ 和由输入产生的 $R_{zs}(s)$ 。（例 4-7-2，教材习题 2-6(1), p.1-2）

4. 作部分分式并逆变换，最后用初值、终值或代回原方程检查。（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.3；§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.11-12）

- 单边法直接得到全响应。若令全部初始状态为零，则 $R_{zs}(s) = H(s)E(s)$ ；若令输入为零，则剩余初值项给出零输入响应。（例 4-7-2，教材习题 2-6(1), p.1-2）
- 0^- 法统一保留 $t = 0$ 的冲激作用和换路前状态；若改用 0^+ 初值，必须先用连续性/换路定则求出 0^+ ，并正确处理输入在原点的跳变。（例 4-5-1, p.1-5）

5.2 s 域元件模型

s 域元件模型（*s-domain element model*）把电阻、电感、电容的微积分关系化为代数关系，并用附加等效源保留储能元件的初始状态。（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.5-8）

元件	s 域关系	初始状态的等效含义
电阻	$V_R(s) = RI_R(s)$	阻抗仍为 R ，无独立初始储能项。
电感	$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$	阻抗为 sL ，初始电流表现为附加等效源。
电容	$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{v_C(0^-)}{s}$	阻抗为 $1/(sC)$ ，初始电压表现为附加等效源。

（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.5-8）

- 电路法步骤是：求 0^- 初始状态 → 画 s 域等效模型 → 用 KCL/KVL 列代数方程 → 求 $V(s)$ 或 $I(s)$ → 逆变换。（§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.5, p.9）
- 对 RLC 二阶系统，可令

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

当 $\alpha < \omega_0$ 时为欠阻尼（*underdamped*）衰减振荡； $\alpha = \omega_0$ 时为临界阻尼（*critically damped*），出现重极点和 $te^{-\alpha t}$ ； $\alpha > \omega_0$ 时为过阻尼（*overdamped*）非振荡衰减。（例 4-5-3(教材例 4-14), p.3-6）

易错点

- 电感电流和电容电压通常在无冲激激励时连续，但电阻电压、电容电流等可发生跳变；不能把所有变量都机械地设成 $0^+ = 0^-$ 。
(例 4-5-1, p.1-5)
- 二阶方程中最常漏掉 $f'(0^-)$ ；直接画 s 域模型时最常漏掉电感、电容的初始状态等效源。
(§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、 S 域元件模型, p.4, p.7-8)

6 4-6 系统函数 $H(s)$ 与系统互联

6.1 定义与求法

- 对零初始状态 LTI 系统，系统函数 (system function) (亦称网络函数 (network function)) 满足

$$r_{zs}(t) = e(t) * h(t) \quad \longleftrightarrow \quad R_{zs}(s) = E(s)H(s),$$

因而

$$H(s) = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)} = \mathcal{L}\{h(t)\}.$$

$H(s)$ 描述的是零状态输入输出关系。

(§4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.2)

- 求 $H(s)$ 的三种常见入口：对 $h(t)$ 作拉氏变换；对微分方程在零初始状态下作变换；由 s 域网络模型直接求输出/输入比。
(§4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.4)
- 冲激响应 (impulse response) 是输入为 $\delta(t)$ 时的零状态响应 $h(t)$ ，其拉普拉斯变换就是 $H(s)$ 。
(§4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.2)

由框图的 $H(s)$ 反写微分方程

若框图化简得到

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{1}{s+3},$$

则

$$(s+3)R(s) = E(s) \quad \Longrightarrow \quad r'(t) + 3r(t) = e(t).$$

这一步按零初始状态下的系统函数关系反写。

(例 4-6-2, p.1)

6.2 互联系统

并联、级联与负反馈

$$\begin{aligned} \text{并联:} \quad H(s) &= H_1(s) + H_2(s), \\ \text{级联:} \quad H(s) &= H_1(s)H_2(s), \\ \text{负反馈:} \quad H(s) &= \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \end{aligned}$$

时域中，并联对应冲激响应相加，级联对应冲激响应卷积。
(§4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.5-7)

- 策动点函数 (driving-point function) 的激励与响应位于同一端口，如策动点阻抗、导纳；转移函数 (transfer function) 的激励与响应位于不同端口，如电压比、转移阻抗和转移导纳。
(§4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.3)

- $H(p)$ 是微分算子形式，面向全响应，不能随意约去可能改变初始条件约束的公因子； $H(s)$ 是零状态系统函数，可按有理函数处理。(比较 $H(s)$ 和 $H(p)$, p.1)

含冲激的系统冲激响应

由

$$r'' + 5r' + 6r = 2e'' + 6e'$$

在零初始状态下可得

$$H(s) = \frac{2s^2 + 6s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s}{s + 2} = 2 - \frac{4}{s + 2},$$
$$h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t}u(t).$$

非真系统函数的多项式部分对应冲激直通项。

(例 4-6-1, p.1)

7 4-7 零极点与时域响应

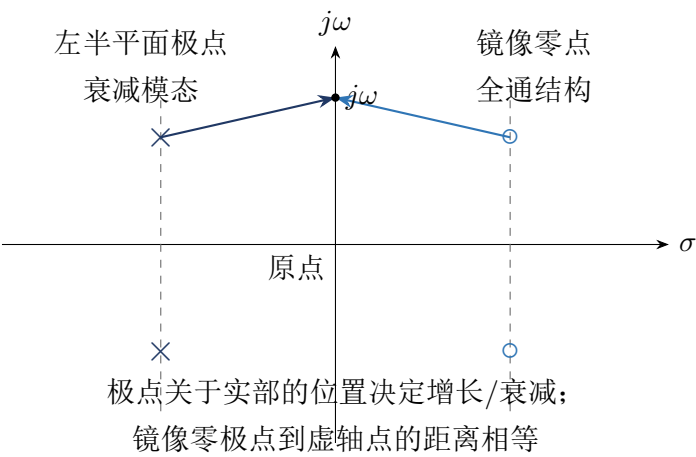
7.1 零极点表示

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}.$$

- z_j 为零点，用空心圆表示； p_i 为极点，用叉号表示。极点决定冲激响应中的基本指数模态，零点通过留数和相消改变模态权重。

(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.2-3)
- 若系统函数发生零极点精确相消，相消模态不会出现在该输入输出端口的 $H(s)$ 中；课件称相应固有频率可能丢失。

(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.8)



(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.3-6; §4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2-3)

7.2 极点位置与时域模态

极点	典型时域项	波形特征
$p = 0$	$u(t)$	常量，不衰减。
$p = -a, a > 0$	$e^{-at}u(t)$	左半平面实极点，指数衰减。
$p = a, a > 0$	$e^{at}u(t)$	右半平面实极点，指数增长。
$p = \pm j\omega_0$	$\sin \omega_0 t u(t)$ 、 $\cos \omega_0 t u(t)$	虚轴单极点，等幅振荡。
$p = -\alpha \pm j\omega_0$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \phi)u(t)$	$\alpha > 0$ 衰减振荡； $\alpha < 0$ 增幅振荡。
r 重极点 p	$t^{r-1}e^{pt}u(t)$	多项式因子增强长期趋势；虚轴重极点导致增幅。

(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.4-6)

7.3 自由/强迫与暂态/稳态

- 对 $R(s) = H(s)E(s)$ ，一般地， $H(s)$ 的极点产生自由响应 (*free response*) 分量， $E(s)$ 的极点产生强迫响应 (*forced response*) 分量；各分量系数同时受 $H(s)$ 与 $E(s)$ 影响。

(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.7-8)
- 暂态响应 (*transient response*) 是在 $t \rightarrow \infty$ 时消失的部分，通常由左半平面极点产生；稳态响应等于全响应减去暂态响应。

(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.9)

- 自由/强迫是按极点来源划分，暂态/稳态是按长期是否消失划分，两组概念不是同一划分。例如输入的左半平面极点也可产生会消失的强迫分量。（§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.7-9；例 4-7-2，教材习题 2-6(1), p.3）

例 4-7-2：同一响应的两套分类

$$r(t) = 1.5 + 2e^{-t} - 2.5e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

$$r_{ss}(t) = 1.5,$$

$$r_{tr}(t) = 2e^{-t} - 2.5e^{-2t},$$

$$r_{forced}(t) = 1.5 + 2e^{-t},$$

$$r_{free}(t) = -2.5e^{-2t}.$$

常量项是稳态项；两个指数项虽都属于暂态，但 e^{-t} 项来自输入极点，仍是强迫响应，而 e^{-2t} 项来自系统极点，属于自由响应。

（例 4-7-2，教材习题 2-6(1), p.3）

8 4-8 零极点与频率响应

8.1 正弦稳态与 $H(j\omega)$

- 对稳定因果系统，ROC 包含虚轴，系统频率响应（frequency response）可由

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

得到。

（§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.2-3）

- $|H(j\omega)|$ 与 $\varphi(\omega)$ 分别称为幅频特性（magnitude response）和相频特性（phase response）。（§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.3）
- 若输入为 $E_m \sin(\omega_0 t + \phi)$ ，稳态输出为

$$r_{ss}(t) = E_m |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \phi + \arg H(j\omega_0)].$$

系统只改变该频率分量的幅度和相位，不改变频率。（§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.3-5）

8.2 零极点矢量法

对

$$H(s) = K \frac{\prod_j (s - z_j)}{\prod_i (s - p_i)},$$

在虚轴滑动点 $j\omega$ 处，有

$$H(j\omega) = K \frac{\prod_j (j\omega - z_j)}{\prod_i (j\omega - p_i)}.$$

幅度看距离，相位看角度

$$|H(j\omega)| = |K| \frac{\prod_j |j\omega - z_j|}{\prod_i |j\omega - p_i|},$$

$$\arg H(j\omega) = \arg K + \sum_j \arg(j\omega - z_j) - \sum_i \arg(j\omega - p_i).$$

零点到 $j\omega$ 的距离进入分子，极点到 $j\omega$ 的距离进入分母；零点贡献正相角，极点贡献负相角。

（§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.7-9）

- 若零点靠近某一虚轴频率，分子距离变小，该处幅度被压低；若极点靠近某一虚轴频率，分母距离变小，该处幅度出现峰值。
(§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.7-9)

- 一阶 RC 低通

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

在 $\omega = 0$ 处幅度为 1，随频率升高而下降，截止频率为 $1/RC$ 。
(例 4-8-2, p.1-2)

- 一阶 RC 高通

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}$$

在原点有零点，因此直流增益为 0；当 $\omega \rightarrow \infty$ 时幅度趋于 1。
(例 4-8-1, p.1-2)

- 低通与高通级联可形成带通系统；课件二阶 RC 例中，两个负实极点给出低、高截止尺度，原点零点抑制直流。
(例 4-8-3, p.1-2)

易错点

- 先确认系统稳定且虚轴属于 ROC，再写 $H(j\omega)$ ；仅有代数式而没有正确 ROC 时，直接代换可能没有意义。
(§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.2; §4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.4-6)
- 幅频由距离乘除得到，相频由角度代数和得到；不要把零点和极点的相角符号写反。
(§4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.7-9)

9 4-9 全通函数与最小相移函数

9.1 全通函数

- 全通函数 (*all-pass function*) 在所有频率上具有常数幅度, 只改变相位:

$$|H_{\text{ap}}(j\omega)| = |K|.$$

稳定全通系统的极点在左半平面, 零点在右半平面, 并关于虚轴逐一镜像。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2-3)

- 对右半平面共轭零点 $\sigma_0 \pm j\omega_0$, 相应二阶全通因子可写为

$$H_{\text{ap}}(s) = \frac{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}{(s + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad \sigma_0 > 0.$$

虚轴上任意 $j\omega$ 到镜像零点和极点的距离相等, 所以模相消而相角保留。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2-3, p.5)

- 全通网络不改变幅度频谱, 可用于相位校正、相位均衡器或移相器。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.3)

9.2 最小相移与分解

- 按本课程口径, 零点只位于左半平面或虚轴的网络称为**最小相移网络** (*minimum-phase network*); 若存在右半平面零点, 则为非最小相移网络。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.4)
- 将非最小相移系统的右半平面零点镜像到左半平面, 可得到具有相同幅频特性的最小相移部分; 为保持原系统函数不变, 还需级联相应全通因子:

$$H_{\text{nonmin}}(s) = H_{\text{min}}(s)H_{\text{ap}}(s).$$

(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.5)

- 判断最小相移主要检查零点位置, 判断因果系统 BIBO 稳定主要检查极点位置; 两者不能混为一谈。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2-4; §4.10 线性系统的稳定性, p.7-9)

易错点

“零极点数目相等”不足以推出全通。必须逐一检查零点与稳定极点是否关于虚轴镜像; 做非最小相移分解时, 镜像零点之后必须补上全通因子。(§4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2, p.5)

10 4-10 连续 LTI 系统的稳定性

10.1 BIBO 定义与时域判据

- 若任意有界输入 $|e(t)| \leq M_e$ 都产生有界零状态输出 $|r(t)| \leq M_r$, 则系统有界输入有界输出稳定 (*bounded-input bounded-output stable, BIBO stable*)。(§4.10 线性系统的稳定性, p.4)
- 连续 LTI 系统 BIBO 稳定的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

充分性来自

$$|r(t)| \leq M_e \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau.$$

(§4.10 线性系统的稳定性, p.4-6)

- 稳定性是系统自身性质，不能因为某个不稳定模态的留数很小就忽略它；任何右半平面极点对应的增长指数最终都会主导响应。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.2-3)

10.2 因果有理系统的极点判据

稳定性与极点位置

- 全部极点严格位于左半平面：因果有理系统 BIBO 稳定。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.7, p.9)
 - 存在右半平面极点，或虚轴上存在二阶及以上极点：不稳定。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.8-9)
 - 虚轴上仅有一阶极点：课件称为临界稳定，时域为常量或等幅振荡；但因 $h(t)$ 不绝对可积，按严格 BIBO 标准仍不稳定。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.8-9)
- 对因果有理系统，ROC 位于最右极点右侧；因此 BIBO 稳定等价于虚轴包含在 ROC 中，也等价于全部极点严格在左半平面。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.7-9; §4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.5, p.9)
 - 反馈例题

$$G(s) = \frac{1}{(s - 1)(s + 2)}$$

采用反馈系数 k 后，

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2 + k}.$$

要使闭环两极点均在左半平面，必须 $k > 2$ 。 (例 4-10-1, p.1-2)

易错点

- BIBO 稳定性主要由极点和 ROC 决定，不由零点位置直接决定。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.7-9)
- 反馈系统应检查闭环特征方程的根，而不是只检查开环 $G(s)$ 的极点。 (例 4-10-1, p.1-2)
- 虚轴单极点可产生不增长的等幅振荡，但仍不满足冲激响应绝对可积条件。 (§4.10 线性系统的稳定性, p.8-9)

11 4-11 双边拉普拉斯变换

11.1 变换式与 ROC 共同决定信号

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

- 双边变换适合统一处理 $t < 0$ 与 $t > 0$ 的全时域信号，并与傅里叶变换、 z 变换的 ROC 思想直接对应。 (§4.11 双边拉氏变换, p.2)

- 对

$$f(t) = \begin{cases} e^{\beta t}, & t < 0, \\ e^{\alpha t}, & t > 0, \end{cases}$$

左半轴收敛要求 $\Re(s) < \beta$ ，右半轴收敛要求 $\Re(s) > \alpha$ ，故 ROC 为

$$\alpha < \Re(s) < \beta,$$

且必须有 $\beta > \alpha$ 。

(§4.11 双边拉氏变换, p.3)

同一代数因子的两种时间方向

$$\begin{aligned} e^{at}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, & \Re(s) > a, \\ -e^{at}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, & \Re(s) < a. \end{aligned}$$

因此双边逆变换不能只查代数式，还要用 ROC 决定每个极点对应的的时间方向。 (§4.11 双边拉氏变换, p.3-4)

11.2 同一有理式的三种答案

对

$$F_B(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s},$$

课件给出：

ROC	$f(t)$
$0 < \Re(s) < 1$	$u(t) + e^t u(-t)$
$\Re(s) > 1$	$(1 - e^t)u(t)$
$\Re(s) < 0$	$(e^t - 1)u(-t)$

(§4.11 双边拉氏变换, p.4)

- ROC 在全部极点右侧，对应右边信号；在全部极点左侧，对应左边信号；夹在相邻极点之间，对应双边信号。 (§4.11 双边拉氏变换, p.3-4)
- 做乘积 $R(s) = H(s)E(s)$ 时，要同时求 ROC 交集。若交集为空，普通双边变换关系不能直接成立。 (§4.11 双边拉氏变换, p.5-6)
- 全时域 RC 换路例中，

$$v_C(t) = Eu(-t) + Ee^{-t/(RC)}u(t), \quad -\frac{1}{RC} < \Re(s) < 0.$$

该结果把换路前的常量状态和换路后的自然衰减统一在一个双边表达式中。 (§4.11 双边拉氏变换, p.5-6)

易错点

- 双边题若不写 ROC，答案通常不完整；ROC 内不能有极点。（§4.11 双边拉氏变换, p.2-4）
- 先列全部极点，再根据时间支撑选择 ROC；不要默认所有部分分式项都乘 $u(t)$ 。（§4.11 双边拉氏变换, p.4）

12 4-12 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

12.1 虚轴是连接两种变换的关键

- 拉普拉斯变换可视为加权信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换，变量满足 $s = \sigma + j\omega$ 。双边形式沿不同竖直线观察复频谱，傅里叶变换对应其中的虚轴 $\sigma = 0$ 。（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.2-3）
- 对有起因信号，可写成

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)u(t)e^{-\sigma t}\} \Big|_{s=\sigma+j\omega}.$$

（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.2-3）

12.2 三种 ROC 与虚轴关系

判断 $F(j\omega)$ 的三步结论

1. 虚轴位于 ROC 内：

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}.$$

例如 $e^{-\alpha t}u(t)$ 的 ROC 为 $\Re(s) > -\alpha$ ，故 $F(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)$ 。（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.5）

2. 虚轴位于 ROC 外：普通傅里叶变换不存在，不能直接代 $s = j\omega$ 。例如 $e^{\alpha t}u(t)$ 的 ROC 为 $\Re(s) > \alpha > 0$ 。（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.4）

3. 虚轴是 ROC 边界且有一阶极点：在广义函数意义下，除代换所得的有理部分外，还要加入与虚轴极点对应的冲激项。（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.6-9）

12.3 虚轴极点与频域冲激

若

$$F(s) = F_a(s) + \sum_n \frac{k_n}{s - j\omega_n},$$

且 $j\omega_n$ 是虚轴一阶极点，则按课件的广义函数写法

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \text{PV} \left[F(s) \Big|_{s=j\omega} \right] + \pi \sum_n k_n \delta(\omega - \omega_n).$$

其中 PV 表示柯西主值（Cauchy principal value），即虚轴极点处的有理项必须按主值解释。（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.7-9）

- 对阶跃信号， $F(s) = 1/s$ ，原点一阶极点留数为 1，因此

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \text{PV} \frac{1}{j\omega}.$$

（§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.6；例 4-12-1, p.1）

- 对截断正弦 $f(t) = \sin \omega_0 t u(t)$, $F(s) = \omega_0 / (s^2 + \omega_0^2)$ 在 $s = \pm j\omega_0$ 有一阶极点, 其完整傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t u(t)\} = \text{PV} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{j\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

第一项必须按主值理解; 由频域卷积定理也可得到同一结果。

(例 4-12-2, p.1-2)

易错点

- 求傅里叶变换前第一步不是代 $s = j\omega$, 而是先判断虚轴与 ROC 的关系。(§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.4-6, p.9)
- 虚轴一阶极点不能只保留 $1/[j(\omega - \omega_n)]$ 型项, 还要按留数补上对应的频域冲激。(§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.7-9)

13 全章解题速查

题型识别与操作顺序

- 求正变换**: 先看时间支撑, 再用变换对和性质; 双边题同步写 ROC。(§4.02 拉普拉斯变换的定义、收敛域.pptx, p.5-9; §4.11 双边拉氏变换, p.2-4)
- 求逆变换**: 先判真分式, 再按互异极点、共轭极点、重极点展开; 最后处理延时和 ROC。(§4.04 拉普拉斯逆变换, p.3-9)
- 解微分方程**: 统一使用 0^- 初值, 解出 $R(s)$, 再按需要区分零输入、零状态、自由、强迫、暂态和稳态。(§4.05 用拉普拉斯变换法分析电路、S 域元件模型, p.3-4; 例 4-7-2, 教材习题 2-6(1), p.1-3)
- 分析系统**: 由 $H(s)$ 找零极点; 极点看时域模态与稳定性, 零极点到虚轴点的矢量看频率响应, 镜像零极点看全通, 零点所在半平面看最小相移。(§4.07 系统函数零、极点分布决定时域特性, p.2-9; §4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.7-9; §4.9 全通函数与最小相移函数的零、极点分布, p.2-5)
- 判断稳定**: 因果有理系统检查全部极点是否严格位于左半平面; 终值定理则检查 $sF(s)$ 的极点条件。(§4.10 线性系统的稳定性, p.7-9; §4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.12)
- 由 LT 求 FT**: 先看虚轴是否在 ROC 内; 在边界上有一阶极点时, 按留数补频域冲激。(§4.12 拉普拉斯变换与傅氏变换的关系, p.4-9)

最后一分钟公式链

$$\begin{aligned} f'(t) &\leftrightarrow sF(s) - f(0^-), & f(t-T)u(t-T) &\leftrightarrow e^{-sT}F(s), \\ e^{-\alpha t}f(t) &\leftrightarrow F(s+\alpha), & f_1 * f_2 &\leftrightarrow F_1F_2, \\ H(s) &= \frac{R_{zs}(s)}{E(s)} = \mathcal{L}\{h(t)\}, & R_{zs}(s) &= H(s)E(s), \\ |H(j\omega)| &= |K| \frac{\prod_j |j\omega - z_j|}{\prod_i |j\omega - p_i|}, \\ \text{因果有理系统 BIBO 稳定} &\iff \Re(p_i) < 0 \text{ 对所有极点成立.} \end{aligned}$$

(§4.03 拉普拉斯变换的基本性质.pptx, p.4, p.8-9, p.13; §4.06 系统函数 (网络函数) $H(S)$, p.2; §4.08 由系统函数零、极点分布决定频响特性, p.7-9; §4.10 线性系统的稳定性, p.7-9)