
信号与系统：第 7 章离散时间系统的时域分析

考前复习提要与公式速查

使用说明：中文为主，核心术语附英文；每个考点均标注原课件与页码。建议先看“核心公式”和“解题方法”，再用页码回查课件推导与例题。

目录

1	7-1 引言：离散时间分析的主线	2
2	7-2 离散时间信号：序列及其运算	2
2.1	表示、支撑与基本操作	2
2.2	单位样值、阶跃及常用序列	3
2.3	离散正弦的周期性	3
3	7-3 离散时间系统的数学模型：差分方程	4
3.1	LTI 性质与标准模型	4
3.2	三类建模入口	4
4	7-4 常系数线性差分方程的时域求解	5
4.1	四种入口与迭代法	5
4.2	经典法：齐次解加特解	5
4.3	特解试探与边界定常数	6
4.4	零输入响应与零状态响应	7
5	7-5 单位样值响应	7
5.1	定义、因果性与稳定性	7
5.2	由差分方程求 $h(n)$	8
6	7-6 离散卷积：卷积和	9
6.1	由单位样值展开推导卷积和	9
6.2	计算前先判支撑范围	9
6.3	公式法：由非零条件确定求和上下限	9
6.4	图解法：倒置、移位、相乘、求和	10
6.5	列表法与利用性质法	10
7	7-7 解卷积	11
7.1	问题类型与递推公式	11
7.2	下三角 Toeplitz 形式	11
7.3	典型例题：由回波辨识系统	11
8	全章综合速查	12

1 7-1 引言：离散时间分析的主线

- 离散时间信号 (*discrete-time signal*) 只在规定的离散时刻有定义；数字信号 (*digital signal*) 还要求各离散时刻的幅值经过 量化 (*quantization*)。因此，时间抽样 (*sampling*) 使自变量离散，幅值量化使函数值分级，两者不可混为一谈。

(§7.1 引言, p.2-4)
- 实际信号处理链路常由连续对象、A/D、数字处理器、D/A 和连续执行部件组成,属于混合系统 (*hybrid system*)。数字系统具有精度、可靠性、存储和可编程性方面的优势，但高速实现及模数转换可能带来复杂度、成本或带宽代价。

(§7.1 引言, p.5-7)
- 离散时间系统与连续时间系统的分析框架平行：微分方程对应差分方程 (*difference equation*)，卷积积分对应卷积和 (*convolution sum*)，拉普拉斯变换对应 z 变换。本章只处理时域主线，即

序列及运算 → 差分方程 → 时域求解 → $h(n)$ → 卷积和 → 解卷积.

(§7.1 引言, p.8-9)

连续与离散时域方法对照

	连续时间系统	离散时间系统
数学模型	微分方程	差分方程
经典解	$y = y_h + y_p$	$y = y_h + y_p$
响应分解	$y = y_{zi} + y_{zs}$	$y = y_{zi} + y_{zs}$
零状态响应	$y_{zs} = x * h$ (卷积积分)	$y_{zs} = x * h$ (卷积和)

(§7.1 引言, p.8-9)

2 7-2 离散时间信号：序列及其运算

2.1 表示、支撑与基本操作

- 等间隔抽样后，连续信号的样值写作 $x(nT)$ ，常简记为序列 $x(n)$ ，其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。序列可用数值列表、解析式、离散波形三种形式表示；列表和波形中必须明确标出 $n = 0$ 。

(§7.2 离散时间信号——序列, p.2; 例 7-2-1, p.1)
- 按支撑范围可分为单边序列 (*one-sided sequence*)、双边序列 (*two-sided sequence*) 和 有限长序列 (*finite-duration sequence*)。

(§7.2 离散时间信号——序列, p.3)

运算	定义	快速判断
相加、相乘	$z(n) = x(n)+y(n), z(n) = x(n)y(n)$	只对相同下标的样值逐点运算。
乘常数	$z(n) = ax(n)$	只改变幅值，不改变支撑位置。
移位	$x(n-m)$ 右移 m , $x(n+m)$ 左移 m	跟踪原来位于 n_0 的样值落到何处。
倒置	$z(n) = x(-n)$	关于 $n = 0$ 折叠。
差分	$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$	分别称前向差分 (<i>forward difference</i>) 和 后向差分 (<i>backward difference</i>)。

累加	$z(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$	离散域对应连续域的积分作用。
重排	$x(an)$ 或 $x(n/a)$	$x(an)$ 可能删点； $x(n/a)$ 的新增整数位置需补零。
能量	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) ^2$	复序列必须保留绝对值。

(§7.2 离散时间信号——序列, p.4-5; 例 7-2-2, p.1)

2.2 单位样值、阶跃及常用序列

单位样值展开与差和关系

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad f(n)\delta(n) = f(0)\delta(n),$$

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m), \quad u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k), \quad \delta(n) = u(n) - u(n-1).$$

(§7.2 离散时间信号——序列, p.7-9)

- $\delta(n)$ 是**单位样值序列** (*unit sample sequence*): 它在 $n = 0$ 取有限值 1, 不应套用连续时间冲激 $\delta(t)$ 的“无限幅、单位面积”图像。任意序列都可按各样值的幅度写成移位单位样值的加权和。(§7.2 离散时间信号——序列, p.7-8)
- 长度为 N 的矩形序列、斜变序列和单边指数序列分别为

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N), \quad r(n) = nu(n), \quad x(n) = a^n u(n).$$

对 $a^n u(n)$, $|a| < 1$ 时包络衰减, $|a| > 1$ 时包络增长; $a < 0$ 时样值符号交替。(§7.2 离散时间信号——序列, p.10-12)

- **复指数序列** (*complex exponential sequence*) 可写为

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n).$$

其实部和虚部分别是同频率的余弦、正弦序列。

(§7.2 离散时间信号——序列, p.16)

2.3 离散正弦的周期性

离散正弦周期判据

$$x(n) = \sin(\omega_0 n + \varphi)$$

为周期序列, 当且仅当存在正整数 N 和整数 k , 使

$$\omega_0 N = 2\pi k.$$

等价地, $\omega_0/(2\pi)$ 必须是有理数; 基本周期是满足上式的最小正整数 N 。(§7.2 离散时间信号——序列, p.13-14)

- $\omega_0 = 2\pi/10$ 时基本周期为 10； $\omega_0 = 4\pi/11$ 时需取 $k = 2$ ，基本周期为 11； $\omega_0 = 0.4$ 时 $\omega_0/(2\pi)$ 为无理数，故序列非周期。
(例 7-2-3, p.1；例 7-2-4, p.1；例 7-2-5, p.1)
- 连续角频率 Ω_0 与数字角频率 ω_0 的关系为

$$\omega_0 = \Omega_0 T_s = 2\pi \frac{\Omega_0}{\omega_s}.$$

离散复指数 $e^{j\omega n}$ 对 ω 具有 2π 周期性，因而常把数字频率折算到主值区间 $(-\pi, \pi)$ 。(§7.2 离散时间信号——序列, p.15-16；数字角频率（离散域的频率）的取值, p.1)

易错点

- 移位题先跟踪样值下标，不能只凭“括号里加减号”猜方向。(§7.2 离散时间信号——序列, p.4；例 7-2-2, p.1)
- 离散时间伸缩不是连续曲线的直接拉伸：压缩会删除样值，扩展常需补零。(§7.2 离散时间信号——序列, p.5；例 7-2-2, p.1)
- 判断正弦周期时不能把 $2\pi/\omega_0$ 四舍五入成整数，必须验证 $\omega_0 N = 2\pi k$ 。(§7.2 离散时间信号——序列, p.14)

3 7-3 离散时间系统的数学模型：差分方程

3.1 LTI 性质与标准模型

- 系统 $T\{\cdot\}$ 的线性 (*linearity*) 要求均匀性和可加性同时成立：

$$T\{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1 T\{x_1(n)\} + c_2 T\{x_2(n)\}.$$

(§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.2)

- 时不变性 (*time invariance*) 要求输入整体移位后，输出只作相同移位：

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n) \implies x(n-N) \xrightarrow{T} y(n-N).$$

同时满足线性与时不变性的系统称 **线性时不变系统** (*linear time-invariant system, LTI system*)。

(§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.2-3)

- 常系数线性差分方程的一般形式为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r).$$

方程阶数由同一变量最高与最低时标之差确定；整体平移所有下标不改变阶数。(§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.9)

3.2 三类建模入口

1. **由实际递推过程建模：** 先确定当前状态、上一状态和外部输入的关系。例如人口模型

$$y(n+1) = (a-b+1)y(n) + x(n).$$

(§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.4)

2. **由微分方程离散化：** 用前向或后向差分近似导数。对 $\frac{dy}{dt} = ay + f$ 采用后向差分，

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{T} = ay(n) + f(n),$$

整理得

$$y(n) = \frac{1}{1-aT}y(n-1) + \frac{T}{1-aT}f(n).$$

该差分模型依赖步长和差分格式，通常是微分方程的数值近似，而非精确等价式。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.5-6, p.10）

3. **由系统框图列方程：** 识别加法器、增益和单位延时器 z^{-1} （或 E^{-1} ），从输出加法器出发逐条追踪支路。典型一阶反馈结构满足

$$y(n) = x(n) + ay(n-1).$$

严格整体移位后应写成 $y(n+1) = x(n+1) + ay(n)$ 。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-8；例 7-3-1, p.1）

差分方程与框图互换

1. 将方程整理为“当前输出 $y(n)$ = 输入支路 + 过去输出反馈支路”。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-9）
2. 每个 z^{-1} 产生一个单位延时；连续 k 个延时得到 $x(n-k)$ 或 $y(n-k)$ 。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-8）
3. 每项系数由增益实现，各支路最终进入求和节点。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-8）
4. 反向由框图列式时，逐支路核对符号、增益和延时数。（§7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-10；例 7-3-1, p.1）

4 7-4 常系数线性差分方程的时域求解

4.1 四种入口与迭代法

- 差分方程可用迭代法、时域经典法、零输入/零状态分解以及 z 变换法求解；本章重点是前三种时域方法。（§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.2）
- **迭代法**（*recursive method*）直接按递推关系逐项求值，适合计算前若干项和检查边界。例如 $y(n) = 3y(n-1) + u(n)$ 、 $y(-1) = 0$ 给出

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 13, \quad y(3) = 40.$$

迭代法通常不直接给出解析通式。

（§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.3；例 7-4-1, p.1）

4.2 经典法：齐次解加特解

经典法总结构

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n).$$

对齐次方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$$

代入 $y(n) = r^n$ ，得到特征方程

$$\sum_{k=0}^N a_k r^{N-k} = 0.$$

(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.4-7)

特征根类型	齐次解 $y_h(n)$	识别重点
互异根 r_i	$\sum_{i=1}^N C_i r_i^n$	每个根对应一个指数项。
s 重根 r	$(C_0 + C_1 n + \cdots + C_{s-1} n^{s-1}) r^n$	独立解依次乘 $1, n, \dots, n^{s-1}$ 。
共轭根 $M e^{\pm j\varphi}$	$M^n (P \cos n\varphi + Q \sin n\varphi)$	$M < 1$ 衰减, $M = 1$ 等幅, $M > 1$ 增幅。

(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.4-6; 例 7-4-2, p.1; 例 7-4-3, p.1; 例 7-4-4, p.1)

• 二阶例题

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$$

的特征根为 2, 3, 故

$$y(n) = C_1 2^n + C_2 3^n = 5 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n.$$

(例 7-4-2, p.1)

• 三重根例题的特征方程为 $(r + 2)^3 = 0$ ，因此

$$y_h(n) = C_1 (-2)^n + C_2 n (-2)^n + C_3 n^2 (-2)^n.$$

漏写 n 或 n^2 会使独立解数量不足。

(例 7-4-3, p.1)

4.3 特解试探与边界定常数

输入形式	常用特解试探	备注
常数 A	$y_p = C$	代回原方程求 C 。
指数 r^n	$y_p = C r^n$	若与特征根重合, 乘 n 。
多项式 n^k	$y_p = A_k n^k + \cdots + A_1 n + A_0$	保持同次数。
$\cos \omega n$ 、 $\sin \omega n$	$y_p = P \cos \omega n + Q \sin \omega n$	也可用复指数辅助。

(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.7)

- 若试探特解已包含在齐次解中, 应乘 n ; 若对应特征根有更高重数, 则继续提高 n 的幂次, 直到与齐次解线性无关。

(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.7)

- 对

$$y(n) + 2y(n-1) = 5u(n), \quad y(-1) = 1,$$

在 $n \geq 0$ 取 $y_p = C = 5/3$ ，齐次解为 $C_1(-2)^n$ 。先由递推式得 $y(0) = 3$ ，再定常数，得到

$$y(n) = \frac{4}{3}(-2)^n + \frac{5}{3}, \quad n \geq 0.$$

(例 7-4-5, p.1-2)

经典法标准流程

整理方程 $\rightarrow$ 特征方程 $\rightarrow$ 判根型写 y_h $\rightarrow$ 按输入设 y_p $\rightarrow$ 代回定系数 $\rightarrow$ 用边界定常数

先用递推式算出足够数量的 $y(0), y(1), \dots$ ，再代入解析式定常数，通常比直接把负时刻条件硬代入通式更稳妥。

(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.4-7; 例 7-4-5, p.1-2)

4.4 零输入响应与零状态响应

响应分解

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n).$$

- **零输入响应** (zero-input response) y_{zi} : 令外加输入为零，由输入作用前的初始状态决定，满足齐次方程。
(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.8)
- **零状态响应** (zero-state response) y_{zs} : 令输入作用前状态为零，只由输入决定；可用经典法或卷积法求得。
(§7.4 常系数线性差分方程的求解, p.8)

“零输入”不等于删掉输入后照抄 $y(0), y(1)$

若题目给出的 $y(0), y(1)$ 已经受到输入影响，它们不是输入加入前的初始状态。必须把原输入和已知输出代回原方程，先倒推 $y(-1), y(-2), \dots$ ，再令 $x(n) = 0$ 求零输入响应。

例 7-4-6 中，由受迫后的 $y(0) = y(1) = 0$ 倒推得

$$y(-1) = -\frac{3}{2}, \quad y(-2) = \frac{11}{4},$$

最终

$$y_{zi}(n) = -5(-2)^n + 4(-1)^n.$$

源课件勘误：《例 7-4-6》p.2 将 $x(n) - x(n-1)$ 按加号计算；此处按 p.1 的原差分方程修正。(例 7-4-6, p.1-3)

5 7-5 单位样值响应

5.1 定义、因果性与稳定性

- **单位样值响应** (unit sample response) $h(n)$ 是系统在零状态下对 $\delta(n)$ 的响应：

$$\delta(n) \xrightarrow[\text{零状态}]{\text{LTI 系统}} h(n).$$

它是连接输入与零状态输出的核心函数。

(§7.5 单位样值响应, p.2)

- 离散 LTI 系统为因果系统 (causal system) 的充要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0.$$

中心滑动平均

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

含有未来输入 $x(n+1), \dots, x(n+M)$, 因此是非因果系统。(§7.5 单位样值响应, p.3; 滑动平均滤波器, p.1)

- 离散 LTI 系统满足 BIBO 稳定性 (BIBO stability) 的充要条件如下: 系统的单位样值响应 $h(n)$ 必须绝对可和 (absolutely summable):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

对 $h(n) = a^n u(n)$, 因果性恒成立, 而稳定性要求 $|a| < 1$ 。(§7.5 单位样值响应, p.3; 例 7-5-3, p.1)

5.2 由差分方程求 $h(n)$

固定流程

框图 $\rightarrow$ 差分方程 $\rightarrow x(n) = \delta(n), y(n) = h(n) \rightarrow$ 写零状态 $\rightarrow$ 递推边界 $\rightarrow$ 解齐次通式

(例 7-5-1, p.1-3; 例 7-5-2, p.1)

- 例 7-5-1 的系统方程为

$$y(n) - 3y(n-1) + 3y(n-2) - y(n-3) = x(n).$$

因而

$$h(n) - 3h(n-1) + 3h(n-2) - h(n-3) = \delta(n).$$

(例 7-5-1, p.1-2)

- 零状态给出 $h(-1) = h(-2) = h(-3) = 0$ 。在 $n = 0, 1, 2$ 处递推得

$$h(0) = 1, \quad h(1) = 3, \quad h(2) = 6.$$

当 $n > 0$ 时右端为零, 特征方程为 $(r-1)^3 = 0$, 故

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right) u(n).$$

(例 7-5-1, p.2-3)

易错点

- $n > 0$ 时方程齐次, 不代表 $h(n) \equiv 0$; $\delta(0) = 1$ 在 $n = 0$ 产生起始样值, 随后由递推关系传播。
(例 7-5-1, p.2-3)
- 稳定性检查的是 $\sum |h(n)|$, 不是 $\sum h(n)$, 也不能只看 $h(n)$ 是否有界。(§7.5 单位样值响应, p.3; 例 7-5-3, p.1)

6 7-6 离散卷积：卷积和

6.1 由单位样值展开推导卷积和

- 将输入展开为

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m).$$

由时不变性， $\delta(n-m)$ 的响应为 $h(n-m)$ ；再由均匀性和可加性，得到零状态响应

$$y_{zs}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n).$$

(§7.6 卷积（卷积和），p.2-3)

卷积和的基本性质

$$x * h = h * x, \quad x * (h_1 * h_2) = (x * h_1) * h_2,$$

$$x * (h_1 + h_2) = x * h_1 + x * h_2, \quad x * \delta = x,$$

$$x(n) * \delta(n-k) = x(n-k).$$

(§7.6 卷积（卷积和），p.4)

注意：本节离散卷积不直接套用连续卷积的微分、积分性质。

(§7.6 卷积（卷积和），p.4)

6.2 计算前先判支撑范围

- 若 $x(n)$ 的非零范围为 $n_1 \leq n \leq n_2$ ， $h(n)$ 的非零范围为 $n_3 \leq n \leq n_4$ ，则

$$n_1 + n_3 \leq n \leq n_2 + n_4.$$

两个有限长序列的长度分别为 L_x, L_h 时，

$$L_y = L_x + L_h - 1.$$

该结论应在计算前用于预判，在计算后用于检查首尾项。

(§7.6 卷积（卷积和），p.6)

6.3 公式法：由非零条件确定求和上下限

解析式法

- 把卷积写成 $\sum_m x(m)h(n-m)$ 。 (§7.6 卷积（卷积和），p.5)
- 分别写出 $x(m) \neq 0$ 与 $h(n-m) \neq 0$ 对 m 的限制。 (§7.6 卷积（卷积和），p.5；例 7-6-1, p.1)
- 对限制取交集；若交集随 n 改变，则对 n 分段。 (§7.6 卷积（卷积和），p.5；例 7-6-1, p.1-2)
- 在正确上下限内求和，并补写输出的支撑条件。 (§7.6 卷积（卷积和），p.5；例 7-6-1, p.1-2)

- 对

$$x(n) = \alpha^n u(n), \quad h(n) = u(n), \quad 0 < \alpha < 1,$$

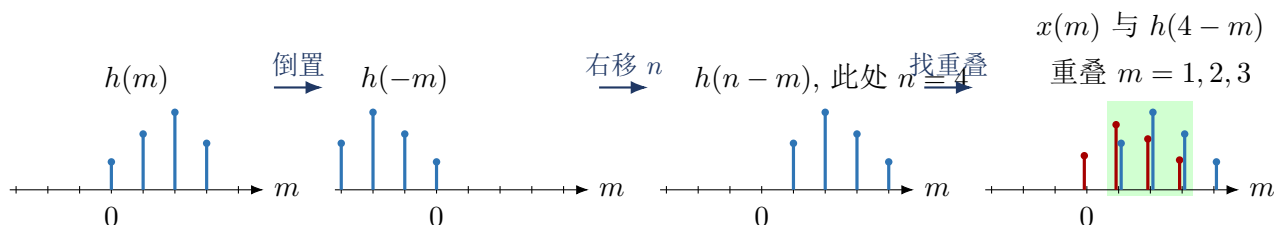
$u(m)$ 要求 $m \geq 0$ ， $u(n-m)$ 要求 $m \leq n$ 。两条件的交集为 $0 \leq m \leq n$ ，且仅在 $n \geq 0$ 时非空，因此

$$y(n) = \sum_{m=0}^n \alpha^m = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u(n).$$

(例 7-6-1, p.1-2)

6.4 图解法：倒置、移位、相乘、求和

1. 固定 $x(m)$ ，把 $h(m)$ 关于 $m = 0$ 倒置为 $h(-m)$ 。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5)
2. 将倒置序列移动 n 个单位，得到 $h(n-m)$ 。 n 变化时，它沿 m 轴滑动。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.3, p.5)
3. 找出 $x(m)$ 与 $h(n-m)$ 的重叠区，在重叠点逐项相乘。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.2)
4. 对所有 m 的乘积求和，得到当前 n 的 $y(n)$ ；再改变 n ，依次完成“初接触、部分重叠、完全重叠、逐渐分离”各区间。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.2)



红色为 $x(m)$ ，蓝色为 $h(n-m)$ ，阴影表示两者同时非零的索引区间。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.2)

图解卷积最常见的索引错误

- $h(n-m)$ 同时包含关于 m 的倒置和由 n 控制的移位，不能直接写成 $h(m-n)$ 或 $h(n+m)$ 。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.3, p.5)
- 求和上下限来自两个序列非零范围的交集，不是固定照抄某个序列的范围。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.1-2)

6.5 列表法与利用性质法

- 对位相乘求和法 (*tabular multiplication-and-sum*) 适合短有限序列。计算前必须标出两个序列的 $n = 0$ ；否则数值可能正确而输出下标整体错位。对

$$x_1(n) = \{\uparrow 4, 3, 2, 1\}, \quad x_2(n) = \{\uparrow 3, 2, 1\},$$

列表卷积得到

$$y(n) = \{\uparrow 12, 17, 16, 10, 4, 1\}.$$

(例 7-6-2, p.1-2)

- 利用单位样值分解和分配律：

$$R_3(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2),$$

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2).$$

因 $x * \delta(n-k) = x(n-k)$ ，可得

$$\begin{aligned} y(n) &= \delta(n) + 3\delta(n-1) + 6\delta(n-2) \\ &\quad + 5\delta(n-3) + 3\delta(n-4). \end{aligned}$$

(§7.6 卷积 (卷积和), p.4; 例 7-6-4, p.1)

卷积方法选择

- 有单位阶跃、指数和明确解析式：优先用**公式法**定上下限。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.1-2)
- 需要展示重叠过程或分段边界：用**图解法**。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-1, p.2)
- 两个短有限序列：用**列表法**，先对齐 $n = 0$ 。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.5; 例 7-6-2, p.1-2)
- 序列可写成若干 $\delta(n - k)$ ：用**性质法**最快。 (§7.6 卷积 (卷积和), p.4; 例 7-6-4, p.1)

7 7-7 解卷积

7.1 问题类型与递推公式

- 在 $y = x * h$ 中，已知 y, h 求 x 属于 **信号恢复 (signal recovery)**；已知 y, x 求 h 属于 **系统辨识 (system identification)**。两类问题统称 **解卷积 (deconvolution)**。 (§7.7 解卷积, p.2)

- 对从 $n = 0$ 开始的因果序列，

$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)h(n-m).$$

若 $h(0) \neq 0$ ，则可前向递推恢复 $x(n)$ ：

$$x(0) = \frac{y(0)}{h(0)}, \quad x(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} x(m)h(n-m)}{h(0)}.$$

(§7.7 解卷积, p.2-3)

- 若 $x(0) \neq 0$ ，则可递推辨识 $h(n)$ ：

$$h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}, \quad h(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)}{x(0)}.$$

每一步只减去已经求出的历史卷积贡献。

(§7.7 解卷积, p.3)

7.2 下三角 Toeplitz 形式

有限段卷积的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N) & h(N-1) & h(N-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix}.$$

该矩阵是下三角 **Toeplitz 矩阵** (*lower-triangular Toeplitz matrix*)；主对角线均为 $h(0)$ ，因此 $h(0) \neq 0$ 时可用前向代入逐项求 $x(n)$ 。

(§7.7 解卷积, p.3)

7.3 典型例题：由回波辨识系统

- 已知

$$x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1), \quad y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),$$

由 $y = h * x$ 逐项递推得到

$$h(0) = 1, \quad h(1) = 0, \quad h(2) = \frac{1}{4}, \quad h(3) = 0, \dots$$

因而

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数,} \\ (1/2)^n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

(§7.7 解卷积, p.4-5)

- 同一关系也可整理为

$$h(n) + \frac{1}{2}h(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n),$$

进一步得到

$$h(n) - \frac{1}{4}h(n-2) = \delta(n).$$

因而该系统的输入输出差分方程为

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-2) = x(n),$$

可由两级单位延时和增益 1/4 的反馈支路实现。(§7.7 解卷积, p.6-7)

解卷积检查清单

1. 先确认序列是否因果、是否从 $n = 0$ 起始。(§7.7 解卷积, p.2)

2. 确认作为除数的首项 $h(0)$ 或 $x(0)$ 非零；若首项为零，应先识别并移除纯延时，不能直接套递推式。(§7.7 解卷积, p.2-3)

3. 从 $n = 0$ 开始前向代入，每次只使用已知历史项。(§7.7 解卷积, p.2-3)

4. 至少把前 3 项代回原卷积，检查 $y(0), y(1), y(2)$ 。(§7.7 解卷积, p.4-5)

- 解卷积可用于传感器信号恢复、地震和石油勘探中的系统辨识。雷达链路可写为

$$r(t) = e(t) * h_T(t) * h(t) * h_R(t),$$

已知发射波形及收发天线响应后，可反求目标冲激响应 $h(t)$ ；实际运算需离散化。(§7.7 解卷积, p.2, p.8)

8 全章综合速查

题型	首要动作	结果检查
序列变换	先标 $n = 0$ ，再做倒置、移位或重排。	检查支撑位置及补零点。
框图建模	从输出加法器追踪输入与反馈支路。	检查每个 z^{-1} 是否对应一个延时。
经典解法	先写特征方程和 y_h ，再按输入设 y_p 。	重根、特解重合时检查 n 因子。
零输入响应	恢复输入加入前的初始状态，再令输入为零。	不得直接照抄受迫后的 $y(0), y(1)$ 。

单位样值响应	令 $x = \delta, y = h$ ，用零状态递推 $n = 0$ 边界。	检查因果性与 $\sum h(n) $ 。
卷积和	先判支撑，再选公式、图解、列表或性质法。	有限长时检查 $L_y = L_x + L_h - 1$ 。
解卷积	检查首项非零，从 $n = 0$ 前向代入。	用原卷积前几项回代。

(§7.2 离散时间信号——序列, p.2-5; §7.3 离散时间系统的数学模型—差分方程, p.7-10; §7.4 常系数线性差分方程的求解, p.4-8; §7.5 单位样值响应, p.2-3; §7.6 卷积（卷积和）, p.3-6; §7.7 解卷积, p.2-5)