

# 信号与系统：第 8 章 $z$ 变换与离散系统

考前复习提要 with 公式速查

使用说明：中文为主，核心术语附英文；每个考点均标注原课件与页码。建议先看“核心公式”和“解题方法”，再用页码回查课件推导与例题。

目录

|    |                       |    |
|----|-----------------------|----|
| 1  | 8-1 引言：从抽样信号到 $z$ 域   | 2  |
| 2  | 8-2 $z$ 变换定义与典型序列     | 2  |
| 3  | 8-3 收敛域 ROC           | 3  |
| 4  | 8-4 逆 $z$ 变换          | 4  |
| 5  | 8-5 $z$ 变换的基本性质       | 6  |
| 6  | 8-6 $z$ 平面与 $s$ 平面的映射 | 7  |
| 7  | 8-7 用 $z$ 变换解差分方程     | 8  |
| 8  | 8-8 离散系统的系统函数         | 9  |
| 9  | 8-9 序列的傅里叶变换 DTFT     | 11 |
| 10 | 8-10 离散时间系统的频率响应      | 11 |
| 11 | 全章公式链与解题检查表           | 13 |

## 1 8-1 引言：从抽样信号到 z 域

- **z 变换** (*z-transform, ZT*) 是求解线性常系数差分方程、分析离散时间系统的基本工具，其作用对应连续时间系统中的拉普拉斯变换。本章主线为

定义与 ROC → 逆变换与性质 → 差分方程 →  $H(z)$  → DTFT 与频率响应

(§8.1 引言, p.2)

- 对抽样信号

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

作拉普拉斯变换，得到

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-snT}.$$

令  $z = e^{sT}$ ，并把  $x(nT)$  简记为  $x(n)$ ，即得到**双边 z 变换** (*bilateral z-transform*)。 (§8.1 引言, p.3-4)

- $X(z)$  是关于  $z^{-1}$  的**洛朗级数** (*Laurent series*):

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \cdots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots.$$

因此，负时间样值对应  $z$  的正幂，正时间样值对应  $z$  的负幂；幂次中的  $-n$  直接标记样值  $x(n)$  的位置。

(§8.1 引言, p.5-6)

### 双边与单边 z 变换

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X^+(z) = \mathcal{Z}_+\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

**双边 z 变换** (*bilateral z-transform*) 适合讨论一般序列、ROC 与系统性质；**单边 z 变换** (*unilateral z-transform*) 会把  $0^-$  初始条件带入位移公式，特别适合解差分方程。

(§8.1 引言, p.4, p.6)

### 幂次方向不要看反

$$n < 0 \implies z^{-n} \text{ 为正幂}, \quad n > 0 \implies z^{-n} \text{ 为负幂}.$$

由  $X(z)$  读序列时，应先看  $z$  的幂次，再用  $n = -\text{幂次}$  定位。

(§8.1 引言, p.5-6)

## 2 8-2 z 变换定义与典型序列

### 2.1 基本变换对

| 序列 $x(n)$   | z 变换 $X(z)$ | 收敛域 (ROC) |
|-------------|-------------|-----------|
| $\delta(n)$ | 1           | 全平面       |

|                        |                                                           |             |
|------------------------|-----------------------------------------------------------|-------------|
| $u(n)$                 | $\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$                  | $ z  > 1$   |
| $nu(n)$                | $\frac{z}{(z - 1)^2}$                                     | $ z  > 1$   |
| $n^2u(n)$              | $\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$                              | $ z  > 1$   |
| $a^n u(n)$             | $\frac{z}{z - a}$                                         | $ z  >  a $ |
| $-a^n u(-n - 1)$       | $\frac{z}{z - a}$                                         | $ z  <  a $ |
| $\cos(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$ | $ z  > 1$   |
| $\sin(\omega_0 n)u(n)$ | $\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$      | $ z  > 1$   |

(§8.2 Z 变换的定义、典型序列的 z 变换, p.3-7)

- 阶跃序列的变换来自几何级数

$$1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

斜变序列及更高次多项式序列可由对连续复变量  $z$  求导得到。 (§8.2 Z 变换的定义、典型序列的 z 变换, p.3-5)

- 一般地,

$$\mathcal{Z}\{n^m x(n)\} = \left[-z \frac{d}{dz}\right]^m X(z) = \left[z^{-1} \frac{d}{d(z^{-1})}\right]^m X(z).$$

离散变量  $n$  本身不做微积分运算, 微分作用于连续复变量  $z$ 。 (§8.2 Z 变换的定义、典型序列的 z 变换, p.4-5)

- 正弦、余弦序列通常先由欧拉公式拆为共轭复指数, 再使用  $e^{\pm j\omega_0 n} u(n) \leftrightarrow z/(z - e^{\pm j\omega_0})$  合并成实系数有理式。 (§8.2 Z 变换的定义、典型序列的 z 变换, p.6-7)

### 代数式不能脱离 ROC

同一个代数式

$$\frac{z}{z - a}$$

既可表示右边序列  $a^n u(n)$ , 也可表示左边序列  $-a^n u(-n - 1)$ 。二者分别由  $|z| > |a|$  与  $|z| < |a|$  区分, 因此完整的 z 变换必须写成“代数式 + ROC”。 (§8.2 Z 变换的定义、典型序列的 z 变换, p.6)

## 3 8-3 收敛域 ROC

### 3.1 定义、边界与判敛

- 收敛域 (region of convergence, ROC) 是使双边级数绝对收敛的全部  $z$  值:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty.$$

ROC 是 z 变换定义不可分割的一部分。

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.2)

- 对正项级数可用比值判别或根值判别。极限小于 1 时收敛, 大于 1 时发散; 极限等于 1 时判别法失效, 必须改用其他方法。 (§8.3 Z 变换的收敛域, p.3; 数项级数收敛性判别法, p.13-18)

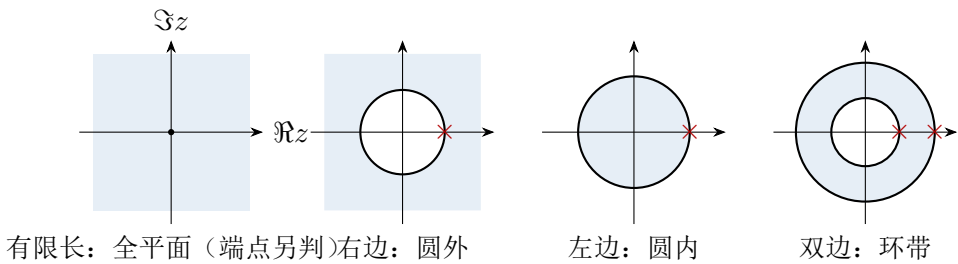
- 有理  $z$  变换的 ROC 是以原点为中心的圆环，边界由极点模决定，且 ROC 内绝不包含极点；边界也不属于 ROC，故书写时使用严格不等式。

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.8)

四类支撑与 ROC 形状

| 序列支撑 | ROC 形状            | 是否包含端点              |
|------|-------------------|---------------------|
| 有限长  | 几乎整个 $z$ 平面       | 可能排除 $0$ 或 $\infty$ |
| 右边序列 | $ z  > R_{\max}$  | 包含 $\infty$         |
| 左边序列 | $ z  < R_{\min}$  | 包含 $0$              |
| 双边序列 | $R_1 <  z  < R_2$ | 圆环                  |

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.4-8)



图中阴影表示 ROC，叉号表示边界极点。

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.4-8；例 8-3-4, p.1)

3.2 典型判断

- 有限长序列若同时含正、负时间样值，则  $X(z)$  同时含  $z$  的正幂与负幂，典型 ROC 为  $0 < |z| < \infty$ 。

(例 8-3-1, p.1)
- $(1/3)^n u(n)$  是右边指数序列，故 ROC 为  $|z| > 1/3$ ；在  $n < 0$  取  $(1/2)^{-n}$  的左边序列，ROC 为  $|z| < 2$ 。

(例 8-3-2, p.1；例 8-3-3, p.1)
- 双边序列的 ROC 是左右两部分条件的交集。例如右边部分要求  $|z| > 1/3$ ，左边部分要求  $|z| < 2$ ，则

$$\frac{1}{3} < |z| < 2.$$

(例 8-3-4, p.1)

ROC 快速判断顺序

先看支撑方向，再找极点半径，最后取各部分条件的交集。若交集为空，则该双边  $z$  变换不存在。

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.4-8)

4 8-4 逆 z 变换

逆  $z$  变换 (*inverse z-transform*) 是在给定  $X(z)$  与 ROC 后恢复序列  $x(n)$ ，本章常用部分分式、幂级数和围线积分三种方法。

(§8.4 逆  $z$  变换, p.2-13)

### 4.1 三种基本方法

1. **部分分式法**：先把  $X(z)/z$  化为真分式，按极点展开，再乘回  $z$  并结合 ROC 查基本变换对。无重极点时常写成

$$X(z) = A_0 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k z}{z - p_k}.$$

因果右边序列对应  $x(n) = A_0 \delta(n) + \sum_k A_k p_k^n u(n)$ 。 (§8.4 逆 z 变换, p.2-4)

2. **幂级数法**：直接使用  $X(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$ 。圆外 ROC 按  $z^{-1}$  展开，读出右边序列；圆内 ROC 按  $z$  的升幂展开，读出左边序列。 (§8.4 逆 z 变换, p.6-7)

3. **围线积分法**：在 ROC 内选取逆时针包围原点的闭合围线  $C$ ,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz.$$

实际计算用留数定理完成。 (§8.4 逆 z 变换, p.8-13)

#### 重极点留数

若  $z = p$  是  $k$  重极点，则

$$\text{Res}_{z=p} [X(z) z^{n-1}] = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-p)^k X(z) z^{n-1} \right\} \right]_{z=p}.$$

右边序列取围线内极点留数之和；左边序列也可取围线外极点留数之和的负值。 (§8.4 逆 z 变换, p.13)

### 4.2 同一有理式的三种反变换

对

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)} = -\frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-2},$$

ROC 决定每一项采用右边还是左边变换对：

| ROC           | 支撑类型              | $x(n)$                      |
|---------------|-------------------|-----------------------------|
| $ z  > 2$     | 两项均为右边            | $[-1 + 2^{n+1}] u(n)$       |
| $1 <  z  < 2$ | 极点 1 取右边，极点 2 取左边 | $-u(n) - 2^{n+1} u(-n-1)$   |
| $ z  < 1$     | 两项均为左边            | $u(-n-1) - 2^{n+1} u(-n-1)$ |

(例 8-4-3, p.1-2)

#### 逆变换的三个常见失误

- 部分分式前忘记处理  $X(z)/z$ ，容易漏掉  $\delta(n)$  项；
- 长除方向与 ROC 不匹配：圆外必须按  $z^{-1}$  展开，圆内按  $z$  展开；
- 留数法中  $z^{n-1}$  可能使  $z = 0$  成为额外极点，必须随  $n$  检查。

(§8.4 逆 z 变换, p.2-7；例 8-4-5, p.1-3)

## 5 8-5 z 变换的基本性质

### 5.1 线性、位移与加权

- 线性：

$$ax(n) + by(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aX(z) + bY(z).$$

ROC 通常为原 ROC 的交集；若发生零极点相消，ROC 可能扩大。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.3；例 8-5-2, p.1）

- 双边位移：

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}X(z), \quad x(n+m) \leftrightarrow z^mX(z).$$

位移通常只可能改变  $z=0$  或  $z=\infty$  是否属于 ROC。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.5；证明双边 z 变换的位移性, p.1）

- 单边左移：

$$\mathcal{Z}_+\{x(n+m)u(n)\} = z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k} \right].$$

左移会删去越过  $n=0$  的前  $m$  个样值。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.6-7；证明左移位性质, p.1）

- 单边右移：

$$\mathcal{Z}_+\{x(n-m)u(n)\} = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k} \right].$$

右移公式中的有限和正是  $0^-$  初始样值的来源。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.6, p.8；证明右移位性质, p.1）

- 线性加权：

$$nx(n) \leftrightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad n^m x(n) \leftrightarrow \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^m X(z).$$

例如  $na^n u(n) \leftrightarrow az/(z-a)^2$ 。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.9；例 8-5-4, p.1）

- 指数加权（z 域尺度变换）：

$$a^n x(n) \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right).$$

若原 ROC 为  $R_1 < |z| < R_2$ ，则新 ROC 的半径相应缩放为  $|a|R_1 < |z| < |a|R_2$ 。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.10；例 8-5-5, p.1）

### 5.2 初值、终值与卷积

#### 初值与终值定理

对因果序列，

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z), \quad x(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[X(z) - x(0)].$$

（§8.5 Z 变换的基本性质, p.11；证明初值定理, p.1）

若终值存在，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z).$$

终值存在的常用极点条件是：除允许  $z=1$  为一阶极点外，相关极点均严格位于单位圆内。（§8.5 Z 变换的基本性质, p.12-14）

• 时域卷积定理：

$$y(n) = x(n) * h(n) \iff Y(z) = X(z)H(z).$$

乘积的 ROC 通常至少包含两 ROC 的交集，但零极点相消可能使其扩大。（§8.5 Z 变换的基本性质，p.15；证明时域卷积定理，p.1）

• 例如  $a^n u(n) * b^n u(n)$  可先在 z 域相乘并部分分式展开：

$$\frac{z}{z-a} \frac{z}{z-b} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} u(n),$$

ROC 为  $|z| > \max(|a|, |b|)$ 。

（例 8-5-7, p.1-2）

**终值定理不是“直接代  $z = 1$ ”**

$2^n$  发散， $(-1)^n$  持续振荡，二者都没有终值；即使代数极限看似可算，也不能机械使用终值定理。必须先检查序列是否收敛以及极点条件。

（§8.5 Z 变换的基本性质，p.12-14）

## 6 8-6 z 平面与 s 平面的映射

### 6.1 基本映射与稳定区域

**核心映射**

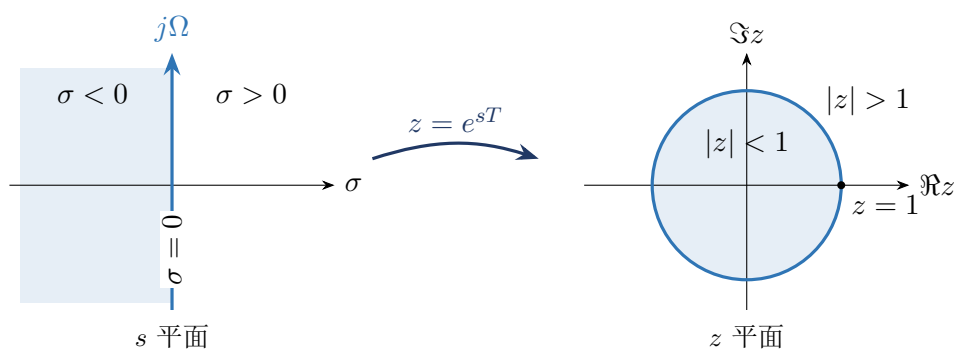
令

$$s = \sigma + j\Omega, \quad z = re^{j\theta},$$

则

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}, \quad r = e^{\sigma T}, \quad \theta = \Omega T \pmod{2\pi}.$$

（§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系，p.2）



$$\sigma < 0 \leftrightarrow |z| < 1, \quad \sigma = 0 \leftrightarrow |z| = 1, \quad \sigma > 0 \leftrightarrow |z| > 1.$$

（§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系，p.2-3）

- $s = 0$  映到  $z = 1$ 。s 平面的左半平面、虚轴、右半平面分别映到 z 平面的单位圆内、单位圆上、单位圆外。这说明连续因果稳定系统的左半平面极点在离散化后落入单位圆内。（§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系，p.3）
- 映射不是一一对应： $\Omega$  与  $\Omega + 2k\pi/T$  具有相同的  $e^{j\Omega T}$ ，因而映到同一个 z 点。这是数字角频率  $2\pi$  周期性的几何来源。

（§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系，p.3）



- 连续指数项

$$A_i e^{p_i t} u(t)$$

抽样后成为  $A_i e^{p_i nT} u(nT)$ ，对应极点由  $p_i$  映到  $e^{p_i T}$ 。若  $X(s) = \sum_i A_i / (s - p_i)$ ，则相应序列的 z 变换由  $\sum_i A_i / (1 - e^{p_i T} z^{-1})$  构成。  
(§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系, p.4-5)

- 连续阶跃在  $t = 0$  常取 1/2，而阶跃序列在  $n = 0$  取 1。从连续信号的部分分式直接建立抽样序列时，必须检查跳变点并补偿  $n = 0$  样值。  
(§8.6 z 平面与 s 平面的映射关系, p.4, p.6)

## 6.2 两个典型抽样变换

$$e^{-anT} u(nT) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}.$$

(例 8-6-1, p.1)

$$\sin(\Omega_0 nT) u(nT) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z^{-1} \sin(\Omega_0 T)}{1 - 2z^{-1} \cos(\Omega_0 T) + z^{-2}}.$$

(例 8-6-2, p.1-2)

## 7 8-7 用 z 变换解差分方程

### 7.1 标准流程与初始条件

#### 单边 z 变换三步法

1. 对差分方程作单边 z 变换，使用含  $0^-$  初始值的位移公式；
2. 代入输入变换与初始条件，解代数方程得到  $Y(z)$ ；
3. 根据 ROC 部分分式展开并作逆 z 变换，最后回代原方程验证。

(§8.7 用 z 变换解差分方程, p.2-4)

常用右移公式为

$$\mathcal{Z}_+ \{y(n-1)u(n)\} = z^{-1}Y(z) + y(-1),$$

$$\mathcal{Z}_+ \{y(n-2)u(n)\} = z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2).$$

(例 8-7-1, p.1; 例 8-7-2, p.2)

- 若题目给出  $y(0), y(1)$ ，但变换公式需要  $y(-1), y(-2)$ ，应先把已知样值代回原差分方程，向前或向后迭代补齐边界值。  
(例 8-7-2, p.1-2)
- 完全响应可直接由含初始条件的  $Y(z)$  求得，也可拆成

$$Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z), \quad y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n).$$

零输入响应令外部输入为零，零状态响应令初始储能为零。

(例 8-7-2, p.2-4)

- 对因果系统，可由  $Y(z)$  的幂次粗判响应起点：当分母比分子高  $q$  次时，展开往往从  $z^{-q}$  开始，即首个非零样值可能在  $n = q$ 。  
(§8.7 用 z 变换解差分方程, p.4)

## 7.2 一阶方程代表例

对

$$y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n), \quad y(-1) = 1,$$

作单边 z 变换并解得

$$Y(z) = 0.5 \frac{z}{z-1} + 0.45 \frac{z}{z-0.9},$$

所以

$$y(n) = 0.5 + 0.45(0.9)^n, \quad n \geq 0.$$

(例 8-7-1, p.1-2)

### 结果必须做两类检查

先检查闭式是否满足题给初始样值，再把前几个样值代回原差分方程。含重极点时，响应中应出现  $na^n$  型项；若部分分式结果没有对应项，通常说明重根处理有误。（§8.7 用 z 变换解差分方程, p.4；例 8-7-2, p.4-5）

## 8 8-8 离散系统的系统函数

### 8.1 定义与零状态响应

零状态条件下，线性常系数差分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

给出

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}.$$

其中  $H(z)$  是离散系统的系统函数 (system function),  $h(n)$  是单位样值响应 (unit-sample response)。

(§8.8 离散系统的系统函数, p.2-4)

$$y_{zs}(n) = h(n) * x(n) \iff Y_{zs}(z) = H(z)X(z).$$

(§8.8 离散系统的系统函数, p.4)

- $H(z)$  只由系统的差分方程系数和结构决定；令输入为  $\delta(n)$  时，输出就是单位样值响应  $h(n)$ 。（§8.8 离散系统的系统函数, p.2-4）
- 由差分方程求  $H(z)$  时必须置零初始状态；否则  $Y(z)/X(z)$  会混入初始储能项，不再是系统函数。（§8.8 离散系统的系统函数, p.3）

### 8.2 零极点与时域模态

若无重极点，因果有理系统可写成

$$H(z) = A_0 + \sum_{k=1}^N \frac{A_k z}{z - p_k},$$

从而

$$h(n) = A_0 \delta(n) + \sum_{k=1}^N A_k p_k^n u(n).$$

(§8.8 离散系统的系统函数, p.6-7)

- 极点 (pole)  $p_k = re^{j\theta}$  的半径  $r$  决定包络:  $r < 1$  衰减,  $r = 1$  等幅,  $r > 1$  增长; 极点角度  $\theta$  决定离散振荡角频率。  
(§8.8 离散系统的系统函数, p.6-9)
- 实系数系统的复极点成共轭对, 典型模态为

$$Ar^n \cos(n\theta + \varphi)u(n).$$

零点 (zero) 和极点共同决定各模态的系数, 但自然响应的基本形态主要由极点决定。(§8.8 离散系统的系统函数, p.6-9)

### 8.3 因果性、稳定性与 ROC

因果性 (causality)、稳定性 (stability) 与 ROC 的关系是系统函数题最常用的判据, 其中稳定性要检查 ROC 是否包含单位圆 (unit circle)。

#### 最重要的三个判据

因果性:  $h(n) = h(n)u(n) \iff \text{ROC 在最外极点之外};$

BIBO 稳定:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \iff \text{ROC 包含单位圆};$

因果有理系统稳定: 全部极点严格位于单位圆内。

(§8.8 离散系统的系统函数, p.10-12)

#### “极点在单位圆内”必须带条件

一般系统是否稳定, 要看  $H(z)$  的 ROC 是否包含单位圆; 只有在因果有理系统语境下, 才能直接把稳定性等价于“全部极点严格位于单位圆内”。左边序列可能极点在单位圆内, 但 ROC 在极点内侧, 仍不包含单位圆。

(§8.8 离散系统的系统函数, p.10-12; 例 8-8-3, p.1; 例 8-8-4, p.1)

### 8.4 高频题型

- 由差分方程求  $H(z)$ , 再计算  $Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$  和零状态响应。  
(例 8-8-1, p.1)
- 由差分方程的时间关系判断输出是否超前输入; 或由  $h(n)$  的支撑及 ROC 判断因果性、稳定性。  
(例 8-8-2, p.1; 例 8-8-3, p.1; 例 8-8-4, p.1)
- 由框图设置中间序列, 分别列局部差分方程, 再消元求  $H(z)$  与  $h(n)$ 。  
(例 8-8-5, p.1)
- 由  $H(z)$  反写差分方程时, 先把分子分母同除以最高次幂, 整理为  $z^{-1}$  的多项式, 再令  $H(z) = Y(z)/X(z)$  交叉相乘。  
(例 8-8-6, p.1)

## 9 8-9 序列的傅里叶变换 DTFT

### 9.1 定义与逆变换

#### DTFT 变换对

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.2, p.4)

- 离散时间傅里叶变换 (*discrete-time Fourier transform, DTFT*) 可由抽样信号的连续傅里叶变换导出, 也等于双边 z 变换在单位圆上的取值:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.2-3)

- 普通意义下 DTFT 存在的 z 域条件是 ROC 包含单位圆。若单位圆上有极点, 则级数通常不绝对收敛, 不能直接把  $z = e^{j\omega}$  代入当作普通 DTFT。(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.3-4)
- 因  $e^{j(\omega+2\pi)} = e^{j\omega}$ ,  $X(e^{j\omega})$  关于  $\omega$  以  $2\pi$  为周期。一个周期的积分区间可取  $[-\pi, \pi]$ 。(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.3-4, p.8)
- 模拟角频率  $\Omega$  的量纲为 rad/s, 数字角频率  $\omega$  的量纲为 rad, 二者满足

$$\omega = \Omega T.$$

连续系统的傅里叶变换是拉普拉斯变换在虚轴上的限制; 离散序列的 DTFT 是 z 变换在单位圆上的限制。

(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.5-9)

#### DTFT 不是 DFT

DTFT 的频率变量  $\omega$  连续, 频谱以  $2\pi$  为周期; DFT 是对有限长序列频谱作有限点采样。两者名称相近, 但定义和用途不同。

(§8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.2-4)

## 10 8-10 离散时间系统的频率响应

### 10.1 频率响应与本征函数

对稳定 LTI 离散系统, 频率响应 (*frequency response*)  $H(e^{j\omega})$  描述复指数本征函数  $e^{j\omega n}$  通过系统后的幅相变化:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \\ &= H(e^{j\omega})e^{j\omega n}. \end{aligned}$$

(§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3-4)

## 幅频与相频特性

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}.$$

$|H(e^{j\omega})|$  : 输出/输入幅度比,  $\varphi(\omega)$  : 输出相移.

其中  $|H(e^{j\omega})|$  是幅频特性 (*magnitude response*),  $\varphi(\omega)$  是相频特性 (*phase response*)。 (§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3, p.8)

- 对实正弦输入,

$$A \sin(n\omega_0) \mapsto A|H(e^{j\omega_0})| \sin[n\omega_0 + \varphi(\omega_0)].$$

稳态响应只改变幅度与相位, 不改变输入角频率。

(频响特性正弦, p.1-3)

- 数字滤波器按幅频形状分为低通、高通、带通、带阻和全通; 所有离散频响均以  $2\pi$  为周期。 (§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3, p.5; 频响特性正弦, p.6-10)
- 对实系数系统, 幅频特性为偶函数, 相频特性为奇函数 (相位按一致的主值与展开方式理解)。(§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.8)

## 10.2 零极点几何法

若

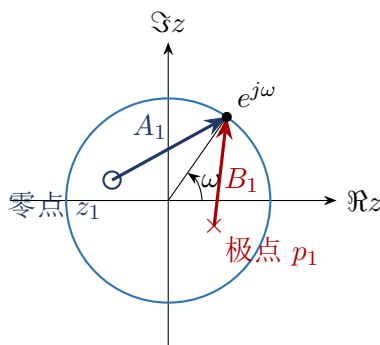
$$H(z) = K \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)},$$

令单位圆动点为  $e^{j\omega}$ , 从各零点、极点连向该点, 则

$$|H(e^{j\omega})| = |K| \frac{\prod_{r=1}^M |e^{j\omega} - z_r|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - p_k|},$$

$$\varphi(\omega) = \arg K + \sum_{r=1}^M \arg(e^{j\omega} - z_r) - \sum_{k=1}^N \arg(e^{j\omega} - p_k).$$

(§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.6)



单位圆动点到零点的距离进入分子, 到极点的距离进入分母。

(§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.6-7)

- 极点越靠近单位圆, 对应角度附近的分母距离越小, 峰值越高、越尖; 极点落在单位圆上时频响可能趋于无穷, 且系统不满足 BIBO 稳定。 (§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.7)
- 零点作用相反: 单位圆上的零点使对应频率的幅度为零, 形成陷波。位于原点的零点或极点到单位圆动点的距离恒为 1, 不改变幅频, 但会贡献线性相位。 (§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.7)

10.3 代表例题

• 两点滑动平均器

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

的系统函数和频响为

$$H(z) = \frac{1}{2}(1 + z^{-1}), \quad H(e^{j\omega}) = \cos \frac{\omega}{2} e^{-j\omega/2}.$$

它在  $\omega = \pi$  处有零点，表现为低通型；提取  $e^{-j\omega/2}$  后可直接读出线性相位。(例 8-10-1, p.1-3)

• 一阶递归系统

$$y(n) = a_1y(n-1) + x(n), \quad H(z) = \frac{z}{z - a_1}$$

在因果条件下稳定要求  $|a_1| < 1$ ，其幅频为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega}}.$$

(例 8-10-2, p.1-2)

• 二阶共轭极点系统满足

$$p_{1,2} = re^{\pm j\theta}, \quad r^2 = -a_2, \quad 2r \cos \theta = a_1.$$

$r < 1$  保证因果系统稳定， $\theta$  给出主要振荡或共振频率； $r$  越接近 1，共振峰越尖锐。(例 8-10-3, p.1-4)

先判单位圆是否在 ROC 内

只有当  $H(z)$  的 ROC 包含单位圆时，才能把  $H(e^{j\omega})$  当作普通稳定系统的频率响应。求频响前先查因果性、极点和 ROC，比直接代  $z = e^{j\omega}$  更重要。(§8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3-4, p.7; 频响特性正弦, p.3)

11 全章公式链与解题检查表

一条贯穿全章的逻辑链

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) + \text{ROC}$$

ROC 决定时域支撑与逆变换

$$\text{差分方程} \xrightarrow[\text{零状态}]{\mathcal{Z}} H(z) = Y(z)/X(z)$$

因果：ROC 在最外极点外,      稳定：ROC 含单位圆

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}, \quad H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

(§8.3 Z 变换的收敛域, p.8; §8.8 离散系统的系统函数, p.10-12; §8.9 序列的傅里叶变换 (DTFT), p.3-4; §8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3-4)

| 题型       | 推荐步骤                | 最后检查             |
|----------|---------------------|------------------|
| 求 $X(z)$ | 分支撑求和或查表，再求 ROC 交集。 | 有理式与 ROC 是否同时写出。 |

|          |                                                    |                       |
|----------|----------------------------------------------------|-----------------------|
| 求 ROC    | 先判有限长/右边/左边/双边，再找极点半径。                             | 极点和边界是否排除。            |
| 逆 $z$ 变换 | 按结构选部分分式、幂级数或留数法。                                  | 每个极点对应的左右边选择是否符合 ROC。 |
| 性质法      | 优先识别位移、 $n^m$ 加权、 $a^n$ 加权和卷积。                     | 单边位移是否补入初始项。          |
| 差分方程     | 单边 $z$ 变换，代初始值，解 $Y(z)$ ，再反变换。                     | 回代初始样值和原方程。           |
| 系统函数     | 先置零状态，再求 $H = Y/X$ 与 $h = \mathcal{Z}^{-1}\{H\}$ 。 | 是否遗漏 ROC、因果性和稳定性条件。   |
| 频率响应     | 先确认 ROC 含单位圆，再令 $z = e^{j\omega}$ 。                | 幅频周期、相位跳变、单位圆零极点。     |

(§8.3  $Z$  变换的收敛域, p.4-8; §8.4 逆  $z$  变换, p.2-13; §8.5  $Z$  变换的基本性质, p.3-15; §8.7 用  $z$  变换解差分方程, p.2-4; §8.8 离散系统的系统函数, p.2-12; §8.10 离散时间系统的频率响应特性, p.3-8)